

Deformation von Lie-Algebroiden und Dirac-Strukturen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Frank Keller

Dezember 2004

Wissenschaftliche Betreuung:

Prof. Dr. Hartmann Römer

PD Dr. Stefan Waldmann

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

Abstract

In this diploma thesis we discuss the deformation theory of Lie algebroids and Dirac structures. The first chapter gives a short introduction to Dirac structures on manifolds as introduced by Courant in 1990. We also give some physical applications of Dirac structures. In the second chapter we present the deformation theory of Lie algebroids following a recent work of Crainic and Moerdijk. We discuss the subject from three different points of view and show the equivalence of these different interpretations. In the third chapter we give definitions for smooth and formal deformations of Dirac structures on Courant algebroids. To investigate the formal theory, we write the Courant bracket with the use of the Rothstein super-Poisson bracket as a derived bracket. As the main result we show that the obstruction for extending a given formal deformation of a certain order lies in the third Lie algebroid cohomology of the Lie algebroid given by the undeformed Dirac structure.

Einleitung

Die Behandlung der klassischen Mechanik mit Hilfe der symplektischen Geometrie hat sich in den letzten 40 Jahren als äußerst gewinnbringend herausgestellt. Zum einen wurde durch eine geometrische Beschreibung erreicht, dass die Theorie unabhängig von Koordinatensystemen formuliert werden kann. Zum anderen zeigt die Phasenraumreduktion für Systeme mit Symmetrien, die sogenannte Marsden-Weinstein-Reduktion der gleichnamigen Autoren, dass auch durchaus Phasenräume mit komplizierten Geometrien in der Physik eine Rolle spielen.

Für die Formulierung der Hamiltonschen Gleichungen muss der Phasenraum jedoch nicht zwingend mit einer symplektischen Struktur ausgestattet sein. Notwendig ist lediglich eine Poisson-Klammer für die Funktionen auf dem Phasenraum. Dies führt auf den Begriff der Poisson-Mannigfaltigkeiten, als Beispiel seien hier die Euler-Gleichungen des starren Körpers auf dem Phasenraum $\mathfrak{so}(3)$ genannt, siehe z.B. [36].

Dirac-Strukturen können als eine Verallgemeinerung von symplektischen Mannigfaltigkeiten und Poisson-Mannigfaltigkeiten aufgefasst werden. Darüberhinaus können aber auch Systeme, die durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sind, mit Hilfe einer geeigneten Dirac-Struktur auf dem Phasenraum beschrieben werden. Dirac-Strukturen wurden 1990 von Courant [11] in Zusammenarbeit mit Weinstein einführt. Weitere Arbeiten sind unter anderem von Bursztyn, Crainic, Liu, Radko, Roytenberg, Weinstein und Xu [33, 40, 42, 41, 43, 9, 8] erschienen. Dabei wurde auch eine Axiomatisierung der Theorie vorgenommen, was zu Dirac-Strukturen in Courant-Algebroiden führte.

Bei der Betrachtung von Systemen mit Eichfreiheitsgraden, die durch eine Lagrangefunktion auf dem Konfigurationsraum TQ gegeben sind, ist es nicht ohne weiteres möglich, zu einer Hamiltonschen Formulierung zu gelangen. Bezeichnen wir mit $M \subseteq T^*Q$ das Bild von TQ unter der Legendretransformation, so ist auf M immer noch eine Dirac-Struktur gegeben. Die Bewegungsgleichungen auf M können dann mit Hilfe dieser Dirac-Struktur formuliert werden. Die konkrete Lösung dieser Gleichungen entspricht gerade dem Dirac-Algorithmus [15] zur Behandlung solcher Systeme, was auch den Namen Dirac-Struktur erklärt. In Anwendungen zur Feldtheorie, in der solche Systeme mit Eichfreiheitsgraden vorkommen, werden die zu betrachtenden Mannigfaltigkeiten in der Regel natürlich nicht endlichdimensional sein. Man hofft jedoch, durch die Betrachtung endlichdimensionaler Problemen Kenntnisse zu erlangen, die anschließend auch zu einem besseren Verständnis von Eichtheorien beitragen.

Behandelt man Systeme mit Symmetrien, so treten Dirac-Strukturen auf natürliche Weise auf. Setzt man eine Observable wie beispielsweise den Drehimpuls auf einen bestimmten Wert fest, so wird das System auf eine Untermannigfaltigkeit N des gesamten Phasenraums eingeschränkt, auf der im Allgemeinen keine symplektische Struktur mehr gegeben ist. Jedoch haben wir auf N immer noch eine Dirac-Struktur, mit deren Hilfe wir die Mechanik beschreiben können.

In der Kontrolltheorie finden Dirac-Strukturen aufgrund ihrer Eigenschaft, Systeme mit Zwangsbedingungen beschreiben zu können, vielfach Verwendung. Dabei werden auch verallgemeinerte oder nicht integrable Dirac-Strukturen zur Behandlung von Systemen mit nichtholonomen Zwangsbedingungen diskutiert. Hier sind insbesondere Arbeiten von Blankenstein, Maschke

und van der Schaft [3, 4, 14, 14] zu nennen. Für die Behandlung von nichtlinearen Differentialgleichungen, die in der Kontrolltheorie auftreten, wurde von Dorfman eine algebraische Version von Dirac-Strukturen entwickelt [16], die auch für solche unendlichdimensionalen Probleme geeignet ist.

In dieser Arbeit soll die Deformationstheorie für Dirac-Strukturen betrachtet werden. Eine algebraische Deformationstheorie für assoziative Algebren wurde in den 60er Jahren von Gerstenhaber [20, 21] entwickelt. Um dabei keine (im Allgemeinen sehr komplizierten) analytischen Probleme behandeln zu müssen, erfolgt die Deformation in einem formalen Rahmen, d.h., man fasst das zu deformierende Objekt als eine formale Potenzreihe in einem formalen Deformationsparameter auf. Falls man sogar eine Deformation findet, die glatt von diesem Deformationsparameter abhängt, entspricht die formale Reihe der Taylorentwicklung dieser glatten Deformation an der Stelle Null.

Für die Physik sind Deformationstheorien unter dem Gesichtspunkt kinematischer oder dynamischer Stabilitätsanalysen wichtig. Damit ist gemeint, dass das Verhalten der Kinematik bzw. Dynamik eines Systems unter kleinen Störungen analysiert werden soll. Jede Störungstheorie kann damit als Beispiel für eine Deformationstheorie dienen. Aber auch die spezielle Relativitätstheorie kann als eine Deformation der Newtonschen Mechanik aufgefasst werden, wobei der Deformationsparameter das Inverse der Lichtgeschwindigkeit ist.

Als wichtige Anwendung einer Deformationstheorie ist weiter die Deformationsquantisierung zu nennen. Deformiert wird dabei das assoziative, kommutative Produkt der klassischen Observablen zu einem zwar weiterhin assoziativen, aber nicht mehr kommutativen Produkt, einem sogenannten Sternprodukt. Die Rolle des Deformationsparameters übernimmt dabei das Plancksche Wirkungsquantum \hbar . Die Deformationsquantisierung wurde 1978 von Bayen, Flato, Frönsdal, Lichnerowicz und Sternheimer [2, 19, 32] eingeführt.

Die Deformation von Dirac-Strukturen ist nun in zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen, um wie oben beschrieben, eine Stabilitätsanalyse durchzuführen. Zum anderen erhofft man sich, durch die klassische Deformationstheorie wichtige Informationen zu sammeln, die für eine spätere Quantisierung hilfreich sein können. Dabei spielt insbesondere das Formalitätstheorem von Kontsevich eine wichtige Rolle [25, 26]. Demnach sind die Äquivalenzklassen von Sternprodukten auf Poisson-Mannigfaltigkeiten in Bijektion zu den Äquivalenzklassen von Deformationen des Poisson-Tensors. Es lässt sich deshalb zumindest vermuten, dass für ein noch zu definierendes Sternprodukt auf einer Dirac-Mannigfaltigkeit die klassische Deformationstheorie ebenfalls wichtig sein wird.

Das Ziel dieser Arbeit ist, eine Definition der formalen Deformationstheorie für Dirac-Strukturen zu geben und deren Eigenschaften zu untersuchen. Dabei soll insbesondere gezeigt werden, dass die Obstruktionen für die Fortsetzbarkeit einer gegebenen Deformation einer bestimmten Ordnung durch eine Kohomologieklassse gegeben sind.

Im ersten Kapitel werden die grundlegenden Definitionen zu Dirac-Strukturen sowie einige wichtige Resultate und Anwendungen vorgestellt. Wir betrachten dazu zunächst lineare Dirac-Strukturen, d.h. Dirac-Strukturen auf Vektorräumen, um die Fragen, die im Bereich der linearen Algebra liegen, zu diskutieren. Anschließend werden wir dann zu Dirac-Mannigfaltigkeiten übergehen, wobei eine zusätzliche Integrabilitätsbedingung an die Dirac-Strukturen gestellt wird. Wir folgen dabei, soweit nichts anderes erwähnt wird, hauptsächlich der Arbeit Courants [11]. Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir mit den Impliziten Hamiltonschen Systemen und der Diracschen Theorie von Zwangsbedingungen noch zwei wichtige physikalische Anwendungsbeispiele für Dirac-Strukturen.

Bevor wir uns der Deformation von Dirac-Strukturen zuwenden, studieren wir im zweiten

Kapitel zunächst die Deformationstheorie von Lie-Algebroiden. Dabei betrachten wir, aufbauend auf einer Arbeit von Crainic und Moerdijk [13], drei verschiedene Formulierungen von Lie-Algebroiden sowie den entsprechenden Deformationstheorien und zeigen deren Äquivalenz. Dies dient einerseits als Einführung in die formale Deformationstheorie, ist aber andererseits auch unter dem Gesichtspunkt interessant, dass Dirac-Strukturen insbesondere auch Lie-Algebroiden sind. Dieses Kapitel ist jedoch weitgehend unabhängig von den anderen.

Im dritten Kapitel soll schließlich die Deformation von Dirac-Strukturen untersucht werden. Zuvor werden wir jedoch die Objekte, mit denen wir uns befassen, noch weiter verallgemeinern, d.h. im Folgenden werden wir Dirac-Strukturen in einem Courant-Algebroid betrachten. Anschließend wollen wir eine Definition für glatte Deformationen von Dirac-Strukturen sowie einen Äquivalenzbegriff dafür angeben.

Um zur formalen Deformationstheorie übergehen zu können, müssen wir unser Problem zunächst auf geeignete Weise umformulieren. Dies ist notwendig, weil die formale Deformationstheorie verlangt, dass von den zu deformierenden Objekten formale Reihen gebildet werden können. Da Dirac-Strukturen aber Untervektorbündel sind, ist dies auf direktem Weg nicht möglich. Wir betrachten eine Deformation L_t einer Dirac-Struktur $L \subseteq E$ in einem Courant-Algebroid E deshalb, zumindest lokal, als den Graphen einer Abbildung $\omega_t : L \rightarrow L'$ in einer geeigneten Aufspaltung $E = L \oplus L'$, wobei $L = L_0$ der Graph von $\omega_0 = 0$ ist. Damit können wir jetzt die formale Deformationstheorie formulieren. Wir werden eine Gleichung für ω_t herleiten, die die Bedingung an L_t , eine Dirac-Struktur zu sein, kodiert und diese Gleichung untersuchen. Um dies systematisch durchführen zu können, geben wir an, wie die Courant-Klammer in dem Courant-Algebroid E mit Hilfe der Rothstein-Klammer als abgeleitete Klammer im Sinne von [40] geschrieben werden kann, ein Resultat, dass sicher auch für sich allein interessant ist. Damit können wir zeigen, dass die Deformationsbedingung ein rekursives, kohomologisches System von Gleichungen für eine Deformation $\omega_t = t\omega_1 + t^2\omega_2 + \dots$ liefert. Wir erhalten damit auch für die Deformation von Dirac-Strukturen das Ergebnis, dass die Obstruktionen für die Fortsetzbarkeit von Deformationen in einer dritten Kohomologie, in diesem Fall der Lie-Algebroid-Kohomologie von L , liegen.

Im Anhang A wird eine kurze Einführung zu Lie-Algebroiden, Lie-Bialgebroiden und damit verwandten Themen gegeben. Schließlich befindet sich im Anhang B noch eine sehr kurze Einführung in die Theorie der formalen Potenzreihen, die für uns im Zusammenhang mit den formalen Deformationen gebraucht werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Dirac-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten	1
1.1	Lineare Dirac-Strukturen	1
1.1.1	Definition und Beispiele	1
1.1.2	Dirac-Abbildungen	5
1.2	Dirac-Mannigfaltigkeiten	7
1.2.1	Courant-Klammer und Integrabilität	8
1.2.2	Präsymplektische Blätterung	11
1.2.3	Die Poisson-Algebra der zulässigen Funktionen	12
1.2.4	Dirac-Mannigfaltigkeiten und Reduktion	13
1.3	Anwendungen	14
1.3.1	Implizite Hamiltonsche Systeme	14
1.3.2	Diracsche Theorie der Zwangsbedingungen	16
2	Lie-Algebroid-Deformation	19
2.1	Deformationen von Lie-Algebren	20
2.1.1	Triviale Deformationen	22
2.2	Lie-Algebroid-Strukturen als Multiderivationen	23
2.3	Deformationen linearer Poisson-Strukturen	25
2.3.1	Homogene Multivektorfelder	25
2.3.2	Lineare Poisson-Deformation	28
2.3.3	Triviale Deformationen	32
2.4	Lie-Algebroid-Strukturen als Derivationen der Grassmannalgebra	33
2.4.1	Algebraische Derivationen	34
2.4.2	Die Lieableitung	35
2.4.3	Transitive Lie-Algebroiden	37
2.4.4	Der Zusammenhang mit den Multiderivationen	38
2.5	Triviale Deformationen im glatten Fall	40
3	Deformation von Dirac-Strukturen	45
3.1	Courant-Algebroiden	45
3.2	Glatte Deformation von Dirac-Strukturen	47
3.2.1	Triviale Deformationen	51
3.3	Formale Deformation von Dirac-Strukturen	53
3.3.1	Deformierte Dirac-Strukturen als Graphen	53
3.3.2	Eine verallgemeinerte Schouten-Nijenhuis-Klammer	54
3.3.3	Formale Dirac-Strukturen	61
3.3.4	Präsymplektische Mannigfaltigkeiten	61
3.3.5	Poisson-Mannigfaltigkeiten	63

3.3.6	Lie-Bialgebroid	63
3.4	Courant-Algebroid als Lie-quasi-Bialgebroid	64
3.5	Die Rothstein-Klammer	67
3.5.1	Zurückgezogen Zusammenhänge	67
3.5.2	Die Rothstein-Klammer	68
3.5.3	Super-Darbouxkoordinaten	70
3.6	Die Courant-Klammer als abgeleitete Klammer	72
3.6.1	Die BRST-Ladung	72
3.6.2	Proto-Bialgebroid	76
3.7	Obstruktion für die Fortsetzbarkeit von Deformationen	78
A	Lie-Algebroid	81
B	Formale Reihen	85

1 Dirac-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

Dirac-Mannigfaltigkeiten, d.h. Mannigfaltigkeiten mit einer Dirac-Struktur, stellen eine Verallgemeinerung von symplektischen Mannigfaltigkeiten und Poisson-Mannigfaltigkeiten dar. Denn ist eine symplektische Form $\omega \in \Omega^2(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M gegeben, so definiert der Graph von ω eine Dirac-Struktur auf M . Dabei wird ω durch die Definition $X \mapsto i_X \omega$ für $X \in TM$ als eine Abbildung $\omega : TM \rightarrow T^*M$ aufgefasst, es gilt also $\text{graph}(\omega) \subseteq TM \oplus T^*M$. Genauso ist der Graph eines Poisson-Tensors $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$, interpretiert als Abbildung $\pi : T^*M \rightarrow TM$, eine Dirac-Struktur. Jedoch braucht nicht jede Dirac-Struktur von der Form eines dieser beiden Beispiele zu sein. In dem allgemeineren Rahmen der Dirac-Mannigfaltigkeiten lassen sich dadurch unter anderem auch physikalische Systeme behandeln, die durch Zwangsbedingungen eingeschränkt sind. Ebenso ein Beispiel für Dirac-Mannigfaltigkeiten sind präsymplektische Mannigfaltigkeiten, also Mannigfaltigkeiten mit einer geschlossenen, eventuell jedoch ausgearteten Zweiform. Systeme dieser Art treten auf, wenn man für eine nichtreguläre Lagrange-funktion zum Hamiltonschen Formalismus übergeht.

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Definitionen sowie einige Aussagen zu Dirac-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten gegeben werden. Dabei folgen wir weitgehend der Arbeit Courants [11], in der Dirac-Strukturen zum ersten mal vorgestellt wurden. Im Anschluss an den mathematischen Teil, den wir zunächst bearbeiten müssen, werden wir am Ende dieses Kapitels schließlich noch zwei für die Physik wichtige Anwendungen vorstellen.

1.1 Lineare Dirac-Strukturen

Bevor wir uns der Betrachtung von Dirac-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten zuwenden, wollen wir zunächst lineare Dirac-Strukturen, d.h. Dirac-Strukturen auf Vektorräumen, betrachten. Diese Ergebnisse können anschließend punktweise auf Mannigfaltigkeiten übertragen werden.

1.1.1 Definition und Beispiele

Sei V ein Vektorraum mit einer Bilinearform (\cdot, \cdot) . Ein Untervektorraum $W \subseteq V$ heißt genau dann isotrop, wenn $W \subseteq W^\perp$ gilt, wobei $W^\perp := \{v \in V \mid (v, w) = 0 \ \forall w \in W\}$ den Orthogonalraum zu W bezeichnet. Ist (\cdot, \cdot) nicht ausgeartet, dann gilt $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ und für W isotrop folgt damit wegen $\dim W \leq \dim W^\perp$, dass $\dim W \leq \frac{\dim V}{2}$. Ein isotroper Unterraum W heißt maximal isotrop, wenn es keinen isotropen Unterraum W' gibt, so dass W ein echter Unterraum von W' ist.

Lemma 1.1.1. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform (\cdot, \cdot) , W ein isotroper Unterraum. Sei U ein Komplement von W in W^\perp , d.h. wir haben eine orthogonale Zerlegung*

$$W^\perp = W \perp U.$$

Schließlich sei w_1, \dots, w_k eine Basis von W . Dann gibt es Vektoren v_1, \dots, v_k in U^\perp , so dass

$$(v_i, v_j) = 0, \quad (w_i, v_j) = \delta_{ij}$$

für $i, j = 1, \dots, k$ gilt, und V die orthogonale Summe

$$V = \text{span}(w_1, v_1) \perp \dots \perp \text{span}(w_k, v_k) \perp U$$

ist.

Beweis. Sei $U_1 = \text{span}(w_2, \dots, w_k) \oplus U$. Dann gilt $U_1 \subsetneq W^\perp \Rightarrow W^{\perp\perp} = W \subsetneq U_1^\perp$. Wir wählen $u_1 \in U_1^\perp \setminus W$, also ist $(u_1, w_1) \neq 0$ und wir können annehmen, dass $(u_1, w_1) = 1$. Sei $P_1 = \text{span}(w_1, u_1)$. Wir finden ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$(\alpha w_1 + u_1, \alpha w_1 + u_1) = 2\alpha(w_1, u_1) + (u_1, u_1) = 0,$$

und setzen $v_1 = \alpha w_1 + u_1$. Damit gilt also

$$(w_1, w_1) = 0, \quad (v_1, v_1) = 0, \quad (w_1, v_1) = 1.$$

Sei nun $W_1 = \text{span}(w_2, \dots, w_k)$. W_1 ist isotrop und es gilt $W_1^\perp = W_1 \perp P_1 \perp U$. Für $k = \dim W = 1$ sind wir fertig, sonst folgt die Behauptung durch Induktion. \square

Folgerung 1.1.2. Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform (\cdot, \cdot) , deren Matrix in Normalform q mal 1 und p mal -1 enthält. Sei W ein isotroper Unterraum. Dann gilt $\dim W \leq \min(q, p)$ und es gibt einen isotropen Unterraum W' mit $\dim W' = \min(q, p)$, so dass $W \subseteq W'$. Maximal isotrope Unterräume haben also alle die Dimension $\min(q, p)$.

Beweis. Sei $\dim W = k$. Wir wissen schon, dass $k \leq \frac{\dim V}{2}$. Sei weiter w_1, \dots, w_k eine Basis von W . Nach Lemma 1.1.1 gibt es v_1, \dots, v_k und u_1, \dots, u_{n-2k} , so dass die Matrixdarstellung von (\cdot, \cdot) in der Basis $w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{n-2k}$ die folgende Gestalt hat:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & \mathbb{E}_k & 0 \\ \mathbb{E}_k & 0 & \\ \hline & 0 & A \end{array} \right).$$

Wählen wir als neue Basisvektoren $a_i = \frac{1}{2}(w_i + v_i)$, $b_i = \frac{1}{2}(w_i - v_i)$, $i = 1, \dots, k$ und geeignete u_i 's, in denen die Matrix A Normalform annimmt, so wird die Bilinearform dargestellt durch

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \mathbb{E}_k & 0 & & \\ 0 & -\mathbb{E}_k & & \\ \hline & 0 & \mathbb{E}_{q-k} & 0 \\ & & 0 & -\mathbb{E}_{p-k} \end{array} \right).$$

An dieser Form kann man zum einen sehen, dass $k = \dim W \leq \min(q, p)$ gelten muss. Andererseits ist jetzt auch klar, wie W zu einem isotropen Unterraum W' der Dimension $\min(q, p)$ erweitert werden kann. \square

Beispiel 1.1.3. Betrachte $V = \mathbb{R}^4$ mit der Minkowski-Metrik $(v, w) = v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3 - v_4 w_4$. Abgesehen vom Nullraum sind die isotropen Unterräume alle eindimensional. Die Elemente der isotropen Unterräume werden in diesem Fall lichtartig genannt.

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim V = n$. Durch die Definition

$$\langle (x, \eta), (y, \mu) \rangle = \eta(y) + \mu(x)$$

ist auf $V \oplus V^*$ auf kanonische Weise eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben.

Definition 1.1.4. Eine Dirac-Struktur auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V ist ein Untervektorraum $L \subseteq V \oplus V^*$, der bezüglich der kanonischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ maximal isotrop ist. Die Menge aller Dirac-Strukturen auf V bezeichnen wir mit $\text{Dir}(V)$.

Bemerkung 1.1.5. Nach Folgerung 1.1.2 sind Dirac-Strukturen also genau die n -dimensionalen, isotropen Unterräume von $V \oplus V^*$. (Offensichtlich gibt es n -dimensionale isotrope Unterräume, z.B. V selbst, und diese müssen bereits maximal sein.)

Bemerkung 1.1.6. Für (x, η) und $(y, \mu) \in L$ gilt

$$\langle (x, \eta), (y, \mu) \rangle = \eta(y) + \mu(x) = 0 \Rightarrow \eta(y) = -\mu(x),$$

$$\langle (x, \eta), (x, \eta) \rangle = 2\eta(x) = 0.$$

Im weiteren bezeichnen wir mit $\rho : V \oplus V^* \longrightarrow V$ bzw. $\rho^* : V \oplus V^* \longrightarrow V^*$ die kanonischen Projektionen auf V bzw. V^* .

Lemma 1.1.7. Sei $L \subseteq V \oplus V^*$ eine lineare Dirac-Struktur auf V und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Sei ferner $W^\circ := \{\lambda \in V^* \mid \lambda(w) = 0 \ \forall w \in W\}$ der Annihilatorraum von W . Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(L)^\circ &= L \cap V^*, \\ \rho^*(L)^\circ &= L \cap V. \end{aligned}$$

Bemerkung 1.1.8. Wir schreiben für $L \cap (V \oplus \{0\})$ einfach $L \cap V$ und fassen $L \cap V$ je nach Situation als Unterraum von V oder von L auf. Entsprechendes gilt für $L \cap V^*$.

Beweis. Sei $\lambda \in L \cap V^*$, und sei $x \in \rho(L)$. Dann gibt es ein $\mu \in V^*$ mit $(x, \mu) \in L$, und es folgt

$$0 = \langle (x, \mu), (0, \lambda) \rangle = \lambda(x) \Rightarrow \lambda \in \rho(L)^\circ.$$

Sei nun umgekehrt $\lambda \in \rho(L)^\circ$ vorausgesetzt. Angenommen, es gilt $\lambda \notin L \cap V^*$. Wir bilden dann den Unterraum $L' = L \oplus \text{span}(\lambda)$, wobei L echt in L' enthalten ist. Weiter ist L' isotrop, denn seien $(x, \mu), (y, \eta) \in L$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \text{span}(\lambda)$, dann folgt

$$\langle (x, \mu) + \lambda_1, (y, \eta) + \lambda_2 \rangle = \lambda_1(y) + \lambda_2(x) = 0.$$

L war aber bereits maximal isotrop, d.h. unsere Annahme führt zu einem Widerspruch. Es folgt also $\lambda \in L \cap V^*$, womit die erste Gleichung gezeigt ist. Die zweite Gleichung lässt sich analog nachweisen. \square

Beispiel 1.1.9. Sei (V, ω) ein präsymplektischer Vektorraum, d.h. ein Vektorraum V mit einer antisymmetrischen Bilinearform ω . Wir fassen die präsymplektische Form als eine Abbildung $\omega : V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto \omega(V, \cdot)$ auf. Dann ist $\text{graph}(\omega) = \{(v, \omega(v)) \mid v \in V\} \subseteq V \oplus V^*$ eine Dirac-Struktur auf V .

Beispiel 1.1.10. Sei (V, π) ein Vektorraum zusammen mit einer linearen antisymmetrischen Abbildung $\pi : V^* \longrightarrow V$. Dann ist $\text{graph}(\pi) = \{(\pi(\lambda), \lambda) | \lambda \in V^*\}$ eine Dirac-Struktur auf V .

Diese beiden Beispiele können gewissermaßen als Spezialfälle des folgenden Satzes angesehen werden.

Satz 1.1.11. *Eine Dirac-Struktur L auf V ist äquivalent zu:*

1. *Einem Untervektorraum R von V zusammen mit einer antisymmetrischen Bilinearform Ω_L auf R .*
2. *Einem Untervektorraum K von V zusammen mit einer antisymmetrischen Bilinearform π_L auf $(V/K)^*$, d.h. einem Bivektor auf V/K .*

Dabei gilt $R = \rho(L)$ und $K = V \cap L = \ker \Omega$.

Bemerkung 1.1.12. Wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, lassen wir im folgenden den Index L an Ω_L und π_L weg.

Beweis. Sei L eine Dirac-Struktur. Wir setzen $R = \rho(L)$ und definieren eine Bilinearform Ω auf K durch $\Omega(\rho(v)) = \rho^*(v)|_R$, also $\Omega(x) = \eta|_R$ für ein $\eta \in V^*$ mit $(x, \eta) \in L$. Ω ist wohldefiniert, denn für $x \in L$ mit $\rho(x) = 0$ folgt $\rho^*(x) \in \rho(L)^\circ = R^\circ$. Weiter ist Ω antisymmetrisch, denn mit $v_1 = (x, \eta), v_2 = (y, \mu) \in L$ gilt $\eta(y) = -\mu(x)$ und es folgt

$$\Omega(x, y) = \eta(y) = -\mu(x) = -\Omega(y, x).$$

Außerdem ist $\ker \Omega = L \cap V$. Genauso können wir eine antisymmetrische Bilinearform π auf $\rho^*(L)$ definieren, und mit dem kanonischen Isomorphismus $\rho^*(L)^* = V/\rho^*(L)^\circ = V/V \cap L$ erhalten wir schließlich einen Bivektor π auf V/K , wobei $K = V \cap L$.

Ist umgekehrt ein Unterraum R mit einer Bilinearform Ω wie in 1. gegeben, so definieren wir einen isotropen Unterraum durch

$$L = \{(x, \eta) | x \in R, \eta \in V^* \text{ mit } \eta|_R = \Omega(x)\},$$

und da L die komplementären Unterräume $(R, *)$ und $(0, R^\circ)$ enthält, ist $\dim L = \dim V$ und damit eine Dirac-Struktur. Im zweiten Fall definieren wir

$$L = \{(x, \eta) | x \in V, \eta \in K^\circ \text{ mit } [x] = \pi(\eta)\},$$

wobei wir wieder $(V/K)^*$ mit K° identifizieren, und $[x]$ die Äquivalenzklasse von x in V/K bezeichnet. L ist isotrop und enthält die Unterräume $(*, K^\circ)$ und $(K, 0)$. \square

Bemerkung 1.1.13. Definieren wir auf $V \oplus V^*$ eine antisymmetrische Bilinearform durch

$$\langle (x, \eta), (y, \mu) \rangle_- = \eta(x) - \mu(y),$$

dann ist Ω durch die Gleichung

$$\rho_L^* \Omega = \frac{1}{2} i^* \langle \cdot, \cdot \rangle_-$$

bestimmt, wobei $\rho_L = \rho|_L$ die Einschränkung von ρ auf die Dirac-Struktur und $i : L \rightarrow V \oplus V^*$ die Einbettung ist.

Ist die Dirac-Struktur als Graph einer Zweiform auf V oder V^* gegeben, dann entspricht die Definition bereits einer der beiden Charakterisierungen aus Satz 1.1.11. Es ist interessant, auch die jeweils andere Beschreibung zu betrachten.

Beispiel 1.1.14. Ist die Dirac-Struktur durch eine antisymmetrische Bilinearform Ω auf V gegeben, so ist π wegen $\ker \pi = L \cap V^* = \{0\}$ eine nicht ausgeartete antisymmetrische Bilinearform auf $(V/\ker \Omega)^*$ und es gilt $\pi^{-1} = \Omega_{\text{red}}$, wobei Ω_{red} die induzierte symplektische Form auf $V/\ker \Omega$ bezeichnet.

Beispiel 1.1.15. Ist die Dirac-Struktur durch eine antisymmetrische Bilinearform π auf V^* gegeben, so ist $K = \{0\}$, $R = \text{im } \pi$ und Ω ist die durch π induzierte symplektische Form auf R . (Es gilt $\ker \Omega = K = \{0\}$.) Genauer ist Ω gegeben durch $\Omega(x) = \eta|_{\text{im } \pi}$ für ein $\eta \in V^*$ mit $\pi(\eta) = x$.

1.1.2 Dirac-Abbildungen

Seien V und W Vektorräume. Wir wollen untersuchen, wie eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ Abbildungen $\mathcal{F}\phi : \text{Dir}(V) \rightarrow \text{Dir}(W)$ und $\mathcal{B}\phi : \text{Dir}(W) \rightarrow \text{Dir}(V)$ induziert. Falls ϕ ein Isomorphismus ist, so können wir ϕ^{-1} und $(\phi^{-1})^*$ bilden und es ist klar, wie $\mathcal{F}\phi$ und $\mathcal{B}\phi$ zu definieren sind. Durch die zwei verschiedenen Charakterisierungen von Dirac-Strukturen nach Satz 1.1.11 können wir aber auch im Allgemeinen beide induzierten Abbildungen definieren. Ist L_W eine Dirac-Struktur auf W , so definieren wir eine Dirac-Struktur L_V auf V durch $\rho(L_V) = \phi^{-1}(\rho(L_W))$ und $\Omega_V = \phi^* \Omega_W$. Umgekehrt ist zu einer gegebenen Dirac-Struktur auf V durch die Vorgaben $K_W = \phi(K_V)$ und $\pi_W = \phi_* \pi_V$ eine Dirac-Struktur auf W gegeben. Dies kann zur Definition der Abbildungen $\mathcal{B}\phi$ und $\mathcal{F}\phi$ dienen, etwas mehr Übersicht bringt aber der folgende Weg nach [9].

Wir übertragen die grundlegenden Definitionen aus der Theorie der kanonischen Relationen [51] vom symplektischen Fall auf Vektorräume mit einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform der Signatur Null. Alles was wir hier brauchen ist in [1, Abschnitt 5.3] zu finden, die Beweise lassen sich direkt übertragen.

Seien (E_i, g_i) , $i = 1, 2, 3$ Vektorräume mit symmetrischen nicht ausgearteten Bilinearformen der Signatur Null. Mit \overline{E}_i bezeichnen wir E_i zusammen mit der Form $-g_i$. Eine kanonische Relation $L \subseteq E_1 \times \overline{E}_2$ ist ein maximal isotroper Unterraum von $E_1 \times \overline{E}_2$. Die Menge der kanonischen Relationen auf $E_1 \times \overline{E}_2$ bezeichnen wir in Analogie zu Lagrangeschen Unterräumen von symplektischen Vektorräumen mit $\text{Lag}(E_1 \times \overline{E}_2)$.

Für zwei kanonische Relationen $L_1 \subseteq E_1 \times \overline{E}_2$ und $L_2 \subseteq E_2 \times \overline{E}_3$ definieren wir eine Verknüpfung \circ durch

$$L_1 \circ L_2 = \{(e_1, e_3) \in E_1 \times E_3 \mid \exists e_2 \in E_2 \text{ mit } (e_1, e_2) \in L_1 \text{ und } (e_2, e_3) \in L_2\}.$$

Man sieht leicht, dass $L_1 \circ L_2$ ein isotroper Unterraum von $E_1 \times \overline{E}_3$ ist. Tatsächlich ist $L_1 \circ L_2$ sogar maximal isotrop [1, Prop. 5.3.12].

Seien nun V und W Vektorräume, und sei $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wir setzen $E = (V \oplus V^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $F = (W \oplus W^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann sind

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\phi &:= \{(\phi(x), \eta, x, \phi^* \eta) \mid x \in V, \eta \in W^*\} \subseteq F \times \overline{E} \\ \mathcal{B}\phi &:= \{(x, \phi^* \eta, \phi(x), \eta) \mid x \in V, \eta \in W^*\} \subseteq E \times \overline{F} \end{aligned}$$

kanonische Relationen.

Bemerkung 1.1.16. Sei U ein weiterer Vektorraum und $\psi : W \rightarrow U$ linear sowie $H = (U \oplus U^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dann zeigt eine kurze Rechnung

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\psi \circ \mathcal{F}\phi &= \mathcal{F}(\psi \circ \phi) \in \text{Lag}(H \times \overline{E}) \\ \mathcal{B}\phi \circ \mathcal{B}\psi &= \mathcal{B}(\psi \circ \phi) \in \text{Lag}(E \times \overline{H}).\end{aligned}$$

Durch die Identifikation von Dirac-Strukturen auf V bzw. W mit kanonischen Relationen auf $E \times \{0\}$ bzw. $F \times \{0\}$ erhalten wir jetzt die gesuchten Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\phi : \text{Dir}(V) &\longrightarrow \text{Dir}(W) \\ L_V &\longmapsto \mathcal{F}\phi \circ L_V\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\phi : \text{Dir}(W) &\longrightarrow \text{Dir}(V) \\ L_W &\longmapsto \mathcal{B}\phi \circ L_W.\end{aligned}$$

Die Symbole $\mathcal{F}\phi$ und $\mathcal{B}\phi$ stehen jetzt einerseits für kanonische Relationen und andererseits für Abbildungen auf Mengen von Dirac-Strukturen. Aus dem Kontext geht aber hervor, was jeweils gemeint ist. Weiter übertragen sich die Gleichungen aus Bemerkung 1.1.16 offensichtlich auch auf die zweite Interpretation von $\mathcal{F}\phi$ bzw. $\mathcal{B}\phi$. Eine kleine Rechnung führt auf die folgenden expliziten Formeln:

$$\mathcal{F}\phi(L_V) = \{(\phi(x), \eta) \mid x \in V, \eta \in W^*, (x, \phi^*\eta) \in L_V\},$$

$$\mathcal{B}\phi(L_W) = \{(x, \phi^*\eta) \mid x \in V, \eta \in W^*, (\phi(x), \eta) \in L_W\}.$$

Man beachte, dass die Abbildungen $\mathcal{F}\phi$ und $\mathcal{B}\phi$ im allgemeinen nicht invers zueinander sind. Ist aber ϕ injektiv, so ist $\mathcal{B}\phi \circ \mathcal{F}\phi = \text{id}$, und ist ϕ surjektiv, dann gilt $\mathcal{F}\phi \circ \mathcal{B}\phi = \text{id}$. Der nächste Satz stellt die Verbindung zu der anfangs erwähnten alternativen Definition her.

Satz 1.1.17. *Sei $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, und seien $L_V \in \text{Dir}(V)$, $L_W \in \text{Dir}(W)$.*

1. *Ist $L_W = \mathcal{F}\phi(L_V)$, dann gilt $\ker \Omega_{L_W} = \phi(\ker \Omega_{L_V})$ und $\pi_{L_W} = \phi_*(\pi_{L_V})$.*
2. *Ist $L_V = \mathcal{B}\phi(L_W)$, dann gilt $\rho(L_V) = \phi^{-1}(\rho(L_W))$ und $\Omega_{L_V} = \phi^*(\Omega_{L_W})$.*

Beweis. Sei $L_W = \mathcal{F}\phi(L_V)$. An der expliziten Form für $\mathcal{F}\phi(L_V)$ sehen wir, dass

$$\ker(\Omega_{L_W}) = W \cap L_W = \{\phi(x) \mid x \in V, (x, 0) \in L_V\},$$

und da $\ker(\Omega_{L_V}) = V \cap L_V = \{x \mid x \in V, (x, 0) \in L_V\}$ folgt $\ker(\Omega_{L_W}) = \phi(\ker(\Omega_{L_V}))$.

Die Abbildung $\phi : V \rightarrow W$ induziert eine Abbildung $V/(V \cap L_V) \rightarrow W/\phi(V \cap L_V) = W/(W \cap L_W)$ auf den Quotienten und $\phi_*\pi_{L_V}$ ist für $\eta \in W/(W \cap L_W)$ definiert durch die Gleichung $\phi_*\pi_{L_V}(\eta) = \phi(\pi_{L_V}(\phi^*\eta))$. Nach der Definition von π_{L_V} gilt weiter $\phi(\pi_{L_V}(\phi^*\eta)) = \phi(x)$ für ein $x \in V$ mit $(x, \phi^*\eta) \in L_V$. Ebenso ist $\pi_{L_W}(\eta) = y$ für ein $y \in W$ mit $(y, \eta) \in L_W$. Ist nun $L_W = \mathcal{F}\phi(L_V)$ so ist $(y, \eta) \in L_W$ genau dann, wenn $y = \phi(x)$ und $(x, \phi^*\eta) \in L_V$. Es folgt also $\pi_{L_W} = \phi_*\pi_{L_V}$.

Der zweite Teil des Satzes folgt genauso wie das eben gezeigte. \square

Bemerkung 1.1.18. Falls $L_V = \text{graph}(\pi)$ für einen Bivektor π auf V , so gilt also $\mathcal{F}\phi(L_V) = \text{graph}(\phi_*\pi)$. Ebenso folgt für $L_W = \text{graph}(\Omega)$ mit einer 2-Form Ω , dass $\mathcal{B}\phi(L_W) = \text{graph}(\phi^*\Omega)$.

Definition 1.1.19. Seien V und W Vektorräume mit Dirac-Strukturen L_V und L_W , und sei $\phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

1. ϕ heißt forward-Dirac-Abbildung, wenn $L_W = \mathcal{F}\phi(L_V)$.
2. ϕ heißt backward-Dirac-Abbildung, wenn $L_V = \mathcal{B}\phi(L_W)$.

Da $\mathcal{F}\phi$ und $\mathcal{B}\phi$ im Allgemeinen nicht invers zueinander sind, sind die beiden Definitionen nicht äquivalent.

Beispiel 1.1.20. Ist $i : W \rightarrow V$ ein Untervektorraum und $L_V = \text{graph}(\Omega)$ mit einer 2-Form Ω sowie $L_W = \text{graph}(i^*\Omega)$, dann ist $L_W = \mathcal{B}i(L_V)$ und i damit eine backward-Dirac-Abbildung.

Beispiel 1.1.21. Sei $L \in \text{Dir}(V)$. Auf $V/\ker(\Omega)$ definieren wir die Dirac-Struktur $\tilde{L} = \text{graph}(\pi_L)$. Dann ist die Projektion $V \rightarrow V/\ker(\Omega_L)$ eine forward-Dirac-Abbildung. Ist insbesondere $L = \text{graph}(\Omega)$, dann folgt $\tilde{L} = \text{graph}(\Omega_{\text{red}})$, wobei Ω_{red} durch $\Omega = \pi^*\Omega_{\text{red}}$ gegeben ist.

1.2 Dirac-Mannigfaltigkeiten

Wir erweitern jetzt die Definition von Dirac-Strukturen auf Mannigfaltigkeiten, indem wir Unterbündel in der (faserweisen) direkten Summe von Tangentialbündel und Kotangentialbündel betrachten, die punktweise Dirac-Strukturen sind. Zusätzlich werden wir aber noch eine Integrabilitätsbedingung fordern, die im linearen Fall nicht auftaucht.

Sei also M eine Mannigfaltigkeit. Auf dem Vektorbündel $TM \oplus T^*M$ haben wir durch

$$\langle (X, \eta), (Y, \mu) \rangle = \eta(Y) + \mu(X)$$

kanonisch eine Bilinearform sowie durch

$$\langle (X, \eta), (Y, \mu) \rangle_- = \eta(Y) - \mu(X)$$

eine antisymmetrisch Form gegeben, wobei $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ und $\eta, \mu \in \Omega^1(M)$.

Definition 1.2.1. Eine verallgemeinerte Dirac-Struktur auf M ist ein bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ maximal isotropes Untervektorbündel L von $TM \oplus T^*M$.

Weiter definieren wir die Vektorbündelhomomorphismen

$$\begin{aligned} \rho : TM \oplus T^*M &\rightarrow TM & \rho^* : TM \oplus T^*M &\rightarrow TM \\ (X, \alpha) &\mapsto X & (X, \alpha) &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

und erhalten wie im linearen Fall für eine Dirac-Struktur L punktweise die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho(L)^\circ &= L \cap T^*M, \\ \rho^*(L)^\circ &= L \cap TM. \end{aligned}$$

Beispiele 1.2.2. Die Beispiel, die wir im Fall linearer Dirac-Strukturen gegeben haben, übertragen sich auf offensichtliche Weise:

1. Sei $\omega \in \Omega^2(M)$. Dann ist $\text{graph}(\omega) \subseteq TM \oplus T^*M$ eine verallgemeinerte Dirac-Struktur.
2. Sei $\pi \in \mathfrak{X}^2(M) = \Gamma^\infty(\wedge^2 TM)$. Dann ist $\text{graph}(\pi) \subseteq TM \oplus T^*M$ eine verallgemeinerte Dirac-Struktur.

Definition 1.2.3. Seien M, N Mannigfaltigkeiten mit verallgemeinerten Dirac-Strukturen L_M und L_N . Sei $\phi : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung. Dann heißt ϕ forward-Dirac-Abbildung, wenn $T_m\phi : T_mM \rightarrow T_{\phi(m)}N$ für alle $m \in M$ eine forward-Dirac-Abbildung ist. Entsprechend heißt ϕ backward-Dirac-Abbildung, wenn $T_m\phi$ für alle $m \in M$ eine backward-Dirac-Abbildung ist.

1.2.1 Courant-Klammer und Integrabilität

Wir haben gesehen, dass der Graph einer Zweiformen ω auf M eine verallgemeinerte Dirac-Struktur definiert. Man ist aber natürlich besonders an solchen Formen ω interessiert, die geschlossen sind. Ebenso wird man vor allem solche Graphen von Bivektorfeldern π betrachten wollen, für die die Bedingung $[\pi, \pi] = 0$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet $[\cdot, \cdot]$ die Schouten-Nijenhuis-Klammer auf M , siehe A.8. Wir werden deshalb jetzt auf $\Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$ eine Verknüpfung einführen, mit deren Hilfe wir eine Bedingung an die Dirac-Strukturen stellen können, die eine Verallgemeinerung der beiden oben genannten Forderungen darstellt.

Definition 1.2.4. Die Courant-Klammer

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M) \times \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M) \rightarrow \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$$

ist für $(X, \eta), (Y, \mu) \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$ durch

$$[(X, \eta), (Y, \mu)] = ([X, Y], \mathcal{L}_X \mu - i_Y d\eta)$$

gegeben.

Bemerkung 1.2.5. Abweichend von [11] definieren wir die Courant-Klammer in der nicht-antisymmetrischen Form, da dies die heute gebräuchlichere Definition ist. Zur Äquivalenz der verschiedenen Definitionen siehe [40, Prop 2.6.5] sowie [33].

Wir verwenden für die Courant-Klammer auf $TM \oplus T^*M$ die gleiche Bezeichnung wie für die Lieklammer von Vektorfeldern bzw. wie für die Schouten-Nijenhuis-Klammer (siehe A.8) von Multivektorfeldern. Dies ist unproblematisch, da die Einschränkung aller drei Klammern auf $\mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM)$ übereinstimmt.

Definition 1.2.6. Eine verallgemeinerte Dirac-Struktur L heißt integrabel oder kurz Dirac-Struktur, wenn L bezüglich der Courant-Klammer abgeschlossen ist,

$$[\Gamma^\infty(L), \Gamma^\infty(L)] \subseteq \Gamma^\infty(L).$$

Lemma 1.2.7. 1. Sei $\omega \in \Omega^2(M)$. Dann ist $\text{graph}(\omega)$ genau dann eine Dirac-Struktur, wenn ω geschlossen ist,

$$d\omega = 0.$$

2. Sei $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$. Dann ist $\text{graph}(\pi)$ genau dann eine Dirac-Struktur, wenn gilt

$$[\pi, \pi] = 0,$$

wobei $[\cdot, \cdot]$ die Schouten-Nijenhuis-Klammer auf M bezeichnet.

Beweis. Der erste Teil folgt aus der Gleichung (vgl. A.8)

$$i_{[X, Y]}\omega = \mathcal{L}_X i_Y \omega - i_Y \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_X i_Y \omega - i_Y d i_X \omega - i_Y i_X d\omega,$$

der zweite ergibt sich mit (siehe [30])

$$\frac{1}{2} i_\beta i_\alpha [\pi, \pi] = \pi(\mathcal{L}_{\pi(\alpha)} \beta - i_{\pi(\beta)} d\alpha) - [\pi(\alpha), \pi(\beta)].$$

Wir werden diese beiden Aussagen später (Abschnitt 3.3.4 und 3.3.5) aber auch aus allgemeineren Betrachtungen wiedergewinnen. \square

Ist $\phi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus, dann haben wir durch $(T\phi, T_*\phi) : TM \oplus T^*M \rightarrow TM \oplus T^*M$ mit $T_*\phi = (T\phi^{-1})^*$ einen kanonischen Lift von ϕ auf $TM \oplus T^*M$ gegeben. Ist L eine Dirac-Struktur, dann gilt $\mathcal{F}\phi(L) = (T\phi, T_*\phi)(L)$. Man sieht leicht, dass $(T\phi, T_*\phi)$ eine Isometrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sowie natürlich bezüglich der Courant-Klammer ist, mit anderen Worten ein Automorphismus von $TM \oplus T^*M$ ist. Somit sind $\mathcal{F}\phi(L)$ und $\mathcal{B}\phi(L) = \mathcal{F}\phi^{-1}(L)$ ebenfalls Dirac-Strukturen.

Definition 1.2.8 (Eichtransformationen). Sei B eine Zweiform auf M . Betrachten wir B als eine Abbildung $B : TM \rightarrow T^*M$, dann ist durch $\tau_B(X, \alpha) = (X, B(X) + \alpha)$ eine Abbildung $\tau_B : TM \oplus T^*M \rightarrow TM \oplus T^*M$ definiert. Wir nennen τ_B eine Eichtransformation.

Lemma 1.2.9. τ_B erhält genau dann die Courant-Klammer auf $TM \oplus T^*M$, wenn B geschlossen ist.

Beweis. Dass τ_B den Anker erhält, ist klar. Weiter folgt aus der Antisymmetrie von B , dass τ_B eine Isometrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist. Damit bleibt noch, das Verhalten der Courant-Klammer unter τ_B zu untersuchen,

$$\begin{aligned} [\tau_B(X, \alpha), \tau_B(Y, \beta)] &= [(X, B(X) + \alpha), (Y, B(Y) + \beta)] \\ &= ([X, Y], \mathcal{L}_X \beta - i_Y d\alpha + \mathcal{L}_X i_Y B - i_Y d\alpha B) \\ &= [(X, \alpha), (Y, \beta)] + \mathcal{L}_X i_Y B - i_Y \mathcal{L}_X B + i_Y i_X dB \\ &= [(X, \alpha), (Y, \beta)] + i_{[X, Y]} B + i_Y i_X dB \\ &= \tau_B([(X, \alpha), (Y, \beta)]) + i_Y i_X dB. \end{aligned}$$

Die Courant-Klammer bleibt also genau dann erhalten, wenn B geschlossen ist. \square

Für spätere Anwendungen formulieren wir hier noch folgendes Lemma.

Lemma 1.2.10. Sei ϕ ein Diffeomorphismus von M und B eine Zweiform. Dann gilt

$$\tau_B \circ (T\phi, T_*\phi) = (T\phi, T_*\phi) \circ \tau_{\phi^*B}.$$

Beweis. Für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $\alpha \in \Omega^1(M)$ gilt

$$\begin{aligned} \tau_B \circ (T\phi, T_*\phi)(X, \alpha) &= (T\phi(X), B(T\phi(X)) + T_*(\alpha)) \\ &= (T\phi(X), (\phi^*B)(X) \circ T\phi^{-1} + T_*\phi(\alpha)) \\ &= (T\phi(X), T_*\phi((\phi^*B)(X) + \alpha)) \\ &= (T\phi, T_*\phi) \circ \tau_{\phi^*B}(X, \alpha). \end{aligned}$$

\square

Lemma 1.2.11. Seien $e_1 = (X_1, \alpha_1)$, $e_2 = (X_2, \alpha_2)$, $e_3 = (X_3, \alpha_3) \in \Gamma^\infty(TM \oplus T^*M)$. Für die Courant-Klammer gelten folgende Identitäten:

1. Jacobi-Identität in der Form

$$[e_1, [e_2, e_3]] = [[e_1, e_2], e_3] + [e_2, [e_1, e_3]].$$

2. *Leibniz-Identität:*

$$\begin{aligned} [e_1, f e_2] &= f[e_1, e_2] + (\rho(e_1)f)e_2 \\ &= f[e_1, e_2] + \mathcal{L}_{X_1} f e_2. \end{aligned}$$

3. *Defekt in der Antisymmetrie:*

$$[e_1, e_2] + [e_2, e_1] = (0, d\langle e_1, e_2 \rangle),$$

insbesondere also $[e_1, e_1] = \frac{1}{2}(0, d\langle e_1, e_1 \rangle)$.

$$4. \mathcal{L}_{X_1} \langle e_2, e_3 \rangle = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3] \rangle.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen. □

Aus den ersten beiden Punkten folgt nun unmittelbar:

Lemma 1.2.12. *Sei $L \subseteq TM \oplus T^*M$ eine verallgemeinerte Dirac-Struktur. Dann ist L zusammen mit der auf L eingeschränkten Courant-Klammer und dem auf L eingeschränkten Anker genau dann ein Lie-Algebroid (siehe A.1), wenn L integrabel ist.*

Aus der Theorie der Lie-Algebroiden erhalten wir folgendes Lemma.

Lemma 1.2.13. *Sei $L \subseteq TM \oplus T^*M$ eine Dirac-Struktur (also integrabel). Dann ist $\rho(L) \subseteq TM$ eine integrable singuläre Distribution (siehe [45] oder [37, 3.21]). D.h. es gibt eine (singuläre) Blätterung von M , so dass die Tangentialräume der Blätter punktweise mit $\rho(L)$ übereinstimmen. Singulär bedeutet dabei, dass die Dimensionen der einzelnen Blätter nicht übereinstimmen müssen.*

Beweis. Seien s_1, \dots, s_n lokale Basisschnitte der Dirac-Struktur L , und seien durch

$$[s_i, s_j] = c_{ij}^k s_k$$

lokale Funktionen c_{ij}^k definiert. Dann spannen die Vektorfelder $\rho(e_1), \dots, \rho(s_n)$ lokal die Distribution $\rho(L) \subseteq TM$ auf, und es gilt

$$[\rho(e_i), \rho(e_j)] = c_{ij}^k \rho(e_k),$$

womit die Integrabilität folgt¹, vgl. [45, Abschnitt 8]. □

Lemma 1.2.14. *Sei L eine verallgemeinerte Dirac-Struktur und seien $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma^\infty(L)$. Wir definieren eine Abbildung*

$$T : \Gamma^\infty(L) \times \Gamma^\infty(L) \times \Gamma^\infty(L) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch

$$T(e_1, e_2, e_3) = \langle [e_1, e_2], e_3 \rangle.$$

Dann ist T antisymmetrisch und $C^\infty(M)$ -linear, also $T \in \Gamma^\infty(\wedge^3 L^*)$, und L ist genau dann integrabel, wenn $T = 0$ gilt.

¹Man beachte, dass diese Bedingung stärker ist als nur die Involutivität, welche bei singulären Distributionen für die Integrabilität bekanntlich noch nicht hinreichend ist.

Beweis. Die Funktionenlinearität in den ersten beiden Argumenten zeigt man mit Lemma 1.2.11 unter Beachtung der Isotropie von L , die Funktionenlinearität im letzten Argument ist klar. Unter Ausnutzung der Isotropie von L lässt sich T umformen zu

$$\begin{aligned}
T((X, \eta), (Y, \mu), (Z, \nu)) &= i_X d i_Y \nu - i_Y d i_X \nu + i_Z d i_X \mu \\
&\quad - d\omega(Y, Z) - d\mu(Z, X) - d\nu(X, Y) \\
&= -\frac{1}{2} (i_X d \langle (Y, \mu), (Z, \nu) \rangle_- + i_Y d \langle (Z, \nu), (X, \omega) \rangle_- \\
&\quad + i_Z d \langle (X, \omega), (Y, \mu) \rangle_-) \\
&\quad - d\omega(Y, Z) - d\mu(Z, X) - d\nu(X, Y),
\end{aligned}$$

womit die Antisymmetrie von T folgt. Ist L integabel, so ist offensichtlich $T = 0$. Da aber L maximal isotrop ist, gilt auch die Umkehrung. \square

1.2.2 Präsymplektische Blätterung

Wenn wir Lemma 1.1.11 punktweise auf eine Dirac-Struktur anwenden, erhalten wir eine antisymmetrische Abbildung

$$\Omega : \rho(L) \times \rho(L) \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei für $X, Y \in \rho(L)$ mit $(X, \alpha), (Y, \beta) \in L$ gilt, dass

$$\Omega(X, Y) = \alpha(Y) = -\beta(X).$$

Sei $i : N \hookrightarrow M$ ein Blatt zu der Distribution $\rho(L)$, und sei Ω_N die auf N eingeschränkte Zweiform Ω . Weiter sei ρ_N die auf $L|_N$ eingeschränkte Projektion, $\rho_N = \rho|_{L_N}$. Dann haben wir folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
TN = \rho(L)|_N & \xleftarrow{\rho_N} & L|_N & \xrightarrow{\bar{i}} & TM \oplus T^*M \\
& \searrow & \downarrow & & \downarrow \\
& & N & \xrightarrow{i} & M
\end{array}$$

wobei jetzt alle Abbildungen Vektorbündelhomomorphismen sind. Wie im linearen Fall gilt jetzt

$$\rho_N^* \Omega_N = \frac{1}{2} i^* \langle \cdot, \cdot \rangle_- ,$$

womit folgt, dass Ω_N eine glatte Zweiform auf N ist.

Seien jetzt $X_1 = \rho(e_1)$, $X_2 = \rho(e_2)$, $X_3 = \rho(e_3) \in \Gamma^\infty(TN) \subset \Gamma^\infty(\rho(L))$. Es lässt sich zeigen [11], dass die Gleichung

$$d\Omega_N(X_1, X_2, X_3) = -T(e_1, e_2, e_3)$$

gilt, und wir erhalten die

Folgerung 1.2.15. Eine integrable Dirac-Struktur hat eine Blätterung mit präsymplektischen Blättern, d.h. auf jedem Blatt N ist eine geschlossene Zweiform Ω_N gegeben.

Beispiel 1.2.16. War L der Graph einer präsymplektischen Form, so ist $\rho(L) = TM$ und das einzige Blatt ist die Mannigfaltigkeit M selbst. Im Falle, dass L der Graph einer Poisson-Struktur π ist, haben wir $\rho(L) = \pi(T^*M)$. Ist N ein Blatt dieser Distribution, so folgt mit $\ker \Omega_N = L \cap TM|_N = \{0\}$, dass (N, Ω_N) eine symplektische Mannigfaltigkeit ist. Wir erhalten also die bekannte Blätterung einer Poisson-Mannigfaltigkeit durch symplektische Blätter [10, Abschnitt 5.1].

1.2.3 Die Poisson-Algebra der zulässigen Funktionen

Definition 1.2.17. Eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ heißt zulässig, wenn $df|_m \in \rho^*(L)$ für alle $m \in M$.

Bemerkung 1.2.18. In der Physik spielen die zulässigen Funktionen die Rolle der eichinvarianten Funktionen, vgl. Satz 1.2.23.

Ist f eine zulässige Funktion, dann gibt es ein Vektorfeld X_f , so dass $(X_f, df) \in \Gamma^\infty(L)$. Wir nennen X_f ein Hamiltonsches Vektorfeld zu f . Im Allgemeinen ist X_f jedoch nicht eindeutig. Trotzdem ist für zwei zulässige Funktionen f, g durch

$$\{f, g\}_L = X_f(g) = \Omega_L(X_f, X_g)$$

eine Klammer definiert. Denn sei X'_f ein zweites Vektorfeld mit $(X'_f, df) \in \Gamma^\infty(L)$, dann folgt $X_f - X'_f \in \Gamma^\infty(L \cap TM) = \rho^*(L)^\circ$, und damit $(X_f - X'_f)(g) = 0$.

Bemerkung 1.2.19. Ist X_f ein Hamiltonsches Vektorfeld zu einer zulässigen Funktion f , so verläuft der Fluss zu X_f innerhalb eines Blattes der verallgemeinerten Distribution $\rho(L)$, denn es gilt ja $(X_f, df) \in \Gamma^\infty(L)$ und damit $X_f \in \Gamma^\infty(\rho(L))$. Die Blätterung einer Dirac-Struktur bildet also eine Art Superauswahlregel.

Satz 1.2.20 ([11, Prop. 2.5.1]). Die Menge der zulässigen Funktionen zusammen mit der eben definierten Klammer $\{\cdot, \cdot\}_L$ ist eine Poisson-Algebra.

Beweis. Es ist klar, dass die zulässigen Funktionen einen \mathbb{R} -Vektorraum bilden. Seien f, g und h zulässige Funktionen und X_f, X_g und X_h zugehörige Hamiltonsche Vektorfelder. Dann ist durch

$$g(X_f, df) + f(X_g, dg) = (gX_f + fX_g, d(fg))$$

ein Schnitt in L definiert, womit die Abgeschlossenheit der zulässigen Funktionen unter der Multiplikation folgt. Weiter gilt

$$\{fg, h\}_L = gX_f(h) + fX_g(h) = g\{f, h\}_L + f\{g, h\}_L,$$

und damit die Leibnizregel für $\{\cdot, \cdot\}_L$. Für die Abgeschlossenheit unter $\{\cdot, \cdot\}_L$ berechnen wir

$$[(X_f, df), (X_g, dg)] = ([X_f, X_g], \mathcal{L}_{X_f} dg) = ([X_f, X_g], d\{f, g\}_L)$$

und schließlich ist die Jacobi-Identität äquivalent zu der Integrabilität von L , denn es gilt

$$\begin{aligned} T((X_f, df), (X_g, dg), (X_h, dh)) &= \langle ([X_f, X_g], d\{f, g\}_L), (X_h, dh) \rangle \\ &= [X_f, X_g](h) + X_h(\{f, g\}_L) \\ &= X_f(\{g, h\}_L) - X_g(\{f, h\}_L) + X_h(\{f, g\}_L) \\ &= \{f, \{g, h\}_L\}_L + \{g, \{h, f\}_L\}_L + \{h, \{f, g\}_L\}_L. \end{aligned}$$

□

1.2.4 Dirac-Mannigfaltigkeiten und Reduktion

Sei $L \subseteq TM \oplus T^*M$ eine Dirac-Struktur. Wir betrachten die Distribution $\ker \Omega = L \cap TM = \ker \rho^*|_L$ auf M . Mit der Integrabilität von L folgt sofort, dass $L \cap TM$ involutiv ist.

Folgerung 1.2.21. Hat die Distribution $L \cap TM$ konstante Dimension, so ist sie integrabel.

Bemerkung 1.2.22. Im Fall, dass L der Graph einer präsymplektischen Form ω mit konstantem Rang ist, folgt wegen $L \cap TM = \ker \omega$ die Integrabilität der charakteristischen Distribution [1, Abschnitt 4.3].

Satz 1.2.23 ([11, Corollary 2.6.3]). *Sei die Dimension von $L \cap TM$ konstant, und bezeichne \mathcal{F} die induzierte Blätterung. Ist M/\mathcal{F} eine Mannigfaltigkeit und die Projektion $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ eine glatte Submersion, dann existiert auf M/\mathcal{F} eine Poisson-Struktur, so dass die Projektion eine forward-Dirac-Abbildung ist.*

Beweis. Man überlegt sich, dass Funktionen auf M/\mathcal{F} mit den zulässigen Funktionen auf M identifiziert werden können. Dadurch wird $C^\infty(M/\mathcal{F})$ zu einer Poisson-Algebra. Die letzte Aussage folgt wie in Beispiel 1.1.21. \square

Sei $L \in TM \oplus T^*M$ eine verallgemeinerte Dirac-Struktur und sei $i : N \hookrightarrow M$ eine Untermannigfaltigkeit. Wir definieren

$$L_N = \frac{L \cap (TN \oplus T^*M)}{L \cap TN^\circ}$$

und identifizieren L_N punktweise mit einem Unterraum von $TN \oplus T^*N$, wobei L_N punktweise maximal isotrop ist. Ist L_N sogar ein glattes Unterbündel, dann folgt, dass L_N eine verallgemeinerte Dirac-Struktur auf N ist. Es gilt nun der folgende Satz, für einen Beweis siehe [11, Abschnitt 3.1].

Satz 1.2.24. *Gelten die oben genannten Voraussetzungen, dann sind äquivalent:*

i.) $L \cap (TN \oplus T^*M)$ hat konstante Dimension.

ii.) $L \cap TN^\circ$ hat konstante Dimension.

Falls eine (und damit beide) dieser Bedingungen gelten, so ist L_N eine verallgemeinerte Dirac-Struktur auf N und die Inklusion $i : N \hookrightarrow M$ ist eine backward-Dirac-Abbildung. War außerdem L integrabel, so ist auch L_N integrabel.

Beispiel 1.2.25 (Marsden-Weinstein-Reduktion, [1, Theo. 4.3.1]). Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ eine äquivariante Impulsabbildung zu einer symplektischen Gruppenaktion auf M . Weiter sei $i : J^{-1}(\mu) \hookrightarrow M$ für $\mu \in \mathfrak{g}^*$ eine Untermannigfaltigkeit sowie $L = \text{graph}(\omega)$. Man findet, dass die Bedingungen von Satz 1.2.24 erfüllt sind und dass $L_{J^{-1}(\mu)} = \text{graph}(i^*\omega)$. Weiter gilt aufgrund der Voraussetzungen an Gruppenaktion und Impulsabbildung, dass $\ker(i^*\omega) = L_{J^{-1}(\mu)} \cap T(J^{-1}(\mu))$ konstante Dimension hat. Bezeichnet \mathcal{F} die durch $\ker(i^*\omega)$ definierte Foliierung von $J^{-1}(\mu)$, dann erhalten wir unter den in Satz 1.2.23

genannten Voraussetzungen insgesamt folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & & M \\
 & \nearrow i & \\
 J^{-1}(\mu) & & \\
 & \searrow \pi & \\
 & & J^{-1}(\mu)/\mathcal{F}
 \end{array}$$

In diesem Fall gehört die Poisson-Struktur auf $J^{-1}(\mu)/\mathcal{F}$ sogar zu einer symplektischen Form ω_{red} . Die Aussage, dass i eine backward- und π eine forward-Dirac-Abbildung ist, überträgt sich zu

$$\pi^* \omega_{red} = i^* \omega.$$

War M eine Poisson-Mannigfaltigkeit, so erhalten wir unter den entsprechenden Voraussetzungen, dass auch $J^{-1}(\mu)/\mathcal{F}$ eine Poisson-Mannigfaltigkeit ist, siehe [11, Abschnitt 3.3].

1.3 Anwendungen

1.3.1 Implizite Hamiltonsche Systeme

Als Anwendungsbeispiel für Dirac-Strukturen geben wir eine kurze Darstellung der Grundlagen Impliziter Hamiltonscher Systeme. Für weiterführende Informationen siehe z.B. [14, 4, 3, 48].

Definition 1.3.1. Sei M eine Mannigfaltigkeit mit (verallgemeinerter) Dirac-Struktur L und Hamiltonfunktion $H \in C^\infty(M)$. Das (verallgemeinerte) implizite Hamiltonsche System ist die Menge aller glatten Kurven $\gamma : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ mit

$$(\dot{\gamma}(t), dH|_{\gamma(t)}) \in L.$$

Die Isotropie der Dirac-Struktur stellt sicher, dass die Hamiltonfunktion eine Erhaltungsgröße ist, dass heißt es gilt

$$\frac{d}{dt} H(\gamma(t)) = \langle dH, \dot{\gamma}(t) \rangle = 0.$$

Die Bewegungsgleichung für ein implizites Hamiltonsches System hat im Allgemeinen nicht durch jeden Punkt von M eine Lösung. Dies ist schon deshalb klar, da die Gleichung nur für Punkte $m \in M$ mit $dH|_m \in \rho^*(L)$ überhaupt erfüllt sein kann. Tatsächlich müssen wir aber im Allgemeinen zu einer noch kleineren Teilmenge von M übergehen, um die Bewegungsgleichung überall lösen zu können. Weiter muss die Lösung, falls eine existiert, auch nicht eindeutig sein.

Die Lösungskurven $\gamma(t)$ zu einem impliziten Hamiltonschen System verlaufen immer in einem bestimmten Blatt der Distribution $\rho(L)$. Schränken wir uns auf ein Blatt $i : N \hookrightarrow M$ ein, so entspricht die Lösung des impliziten Hamiltonschen Systems der Lösung der Hamiltonschen Gleichungen auf der präsymplektischen Mannigfaltigkeit (N, Ω_N) zur Hamiltonfunktion $H|_N$. Siehe dazu auch den nächsten Abschnitt über Diracsche Zwangsbedingungen.

Wir wollen sehen, wie die Bewegungsgleichungen lokal aussehen. Sei deshalb jetzt $M = \mathbb{R}^n$. Nehmen wir weiter an, dass $\rho^*(L)$ konstante Dimension $n - k$ hat. Wir definieren dann wie in Satz 1.1.11 beschrieben eine Abbildung $J : \rho^*(L) \rightarrow (\rho^*(L))^* = TM/(L \cap TM)$, die wir beliebig

zu einer Abbildung $J : T^*M \rightarrow TM/(L \cap TM)$ fortsetzen. Seien nun g_1, \dots, g_k Basisschnitte von $L \cap TM = (\rho^*(L))^\circ$ und $g : \mathbb{R}^k \rightarrow L \cap TM$ die dadurch gegebene Abbildung. Dann folgt

$$dH \in \rho^*(L) \quad \Leftrightarrow \quad g^*dH = dH \circ g = 0.$$

Identifizieren wir nun noch $TM/(L \cap TM)$ mit einem zu $L \cap TM$ komplementären Unterbündel von TM , so übersetzt sich die Bedingung $(\dot{x}, dH) \in L$ in die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= J(dH|_x) + \lambda_i g_i|_x \\ 0 &= g^*dH \end{aligned}$$

Dabei sind die Lagrangeschen Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Funktionen von t und durch die Forderung der zweiten Gleichung eingeschränkt. Im Allgemeinen werden dadurch nicht alle λ_i 's bestimmt sein. Für den Fall, dass die Dirac-Struktur der Graph eines Poisson-Tensors $J : T^*M \rightarrow TM$ ist, gilt $L \cap TM = (\rho^*(L))^\circ = \{0\}$ und damit $g = 0$, und wir erhalten die gewöhnlichen Hamiltonschen Gleichungen.

Ebenso können wir, sofern $\rho(L)$ konstante Dimension $n - k$ hat, eine Abbildung $\omega : \rho(L) \rightarrow \rho(L)^*$ definieren und diese zu einer Abbildung $\omega : TM \rightarrow \rho(L)^*$ erweitern. Sind jetzt p_1, \dots, p_k Basisschnitte von $L \cap T^*M = (\rho(L))^\circ$ und somit $p : \mathbb{R}^k \rightarrow L \cap T^*M$, erhalten wir die Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} dH &= i_{\dot{x}}\omega + \lambda_i p_i \\ 0 &= p^*(\dot{x}) \end{aligned}$$

mit Lagrangeschen Multiplikatoren λ_i , wobei wir noch $\rho(L)^*$ mit einem zu $\rho(L)^\circ$ komplementären Unterbündel identifiziert haben.

Beispiel 1.3.2 (Kinematische Zwangsbedingungen). Sei Q der Konfigurationsraum eines physikalischen Systems. Seien (q_1, \dots, q_n) lokale Koordinaten und seien r Zwangsbedingungen lokal durch

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^i(q) \dot{q}^j = 0, \quad \text{für } i = 1, \dots, r$$

als Bedingung an die Lösungskurven $q(t)$ gegeben. Die α_j^i sind dabei lokal definierte Funktionen auf Q . Wir wollen annehmen, dass es k global definierte Einsformen α_i gibt, so dass die Zwangsbedingungen in der Form $\alpha_i(\dot{\gamma}) = 0$ geschrieben werden können, wobei γ eine Kurve in Q bezeichnet. Sei $\tau : T^*Q \rightarrow Q$ die Projektion, dann definieren wir eine Dirac-Struktur L auf $M = T^*Q$ durch die Forderung

$$L \cap T^*M = \text{span}\{\tau^*\alpha_1, \dots, \tau^*\alpha_r\}$$

sowie durch die Einschränkung der kanonischen symplektischen Zweiform $\omega_0 \in \Omega^2(T^*Q)$ auf $\rho(L) = (L \cap T^*M)^\circ$, vergleiche Satz 1.1.11. Man kann zeigen, dass die so definierte verallgemeinerte Dirac-Struktur genau dann integrabel ist, wenn die Zwangsbedingungen holonom sind [14]. Sei nun $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion. Die Gleichungen des durch (M, L, H) gegebenen impliziten Hamiltonschen Systems können wir damit schreiben als

$$\begin{aligned} dH &= i_{\dot{x}}\omega + \lambda_r \tau^*\alpha_r \\ 0 &= \alpha(T\tau(\dot{x})) \end{aligned}$$

oder, wenn wir zu der oben zuerst genannten Formulierung übergehen und außerdem kanonische Koordinaten verwenden,

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} + \lambda_r \alpha_i^r \\ 0 &= \alpha_i^r \frac{\partial H}{\partial p_i}.\end{aligned}$$

Dies sind die Hamiltonschen Gleichungen für Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen, siehe z.B. [5, Abschnitt 5.8]. Ist die kinetische Energie durch eine positiv definite Metrik auf Q gegeben, so kann man zeigen [14], dass die Hamiltonschen Gleichungen durch jeden Punkt der Untermannigfaltigkeit

$$M_C = \{x \in T^*Q \mid dH|_x \in \rho^*(L)\} \subseteq T^*Q$$

eine eindeutige Lösung haben.

1.3.2 Diracsche Theorie der Zwangsbedingungen

Sei Q der Konfigurationsraum eines physikalischen Systems mit einer Lagrangefunktion $L \in C^\infty(TQ)$. Wir definieren durch

$$\mathbb{F}L(v)(w) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(v + tw)$$

die Faserableitung $\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$. Ist $\mathbb{F}L$ ein Diffeomorphismus, so können wir die Hamiltonfunktion $H \in C^\infty(T^*Q)$ als die Legendretransformierte von L definieren,

$$H \circ \mathbb{F}L(v) = \mathbb{F}L(v)v - L(v).$$

Ist $\mathbb{F}L$ kein Diffeomorphismus, so ist die Hamiltonfunktion im Allgemeinen nicht definiert. In bestimmten Situationen können wir jedoch eine Hamiltonfunktion auf dem Bild der Faserableitung definieren. Nehmen wir an, dass $M := \mathbb{F}L(TQ) \xrightarrow{i} T^*Q$ eine Mannigfaltigkeit ist, sowie dass die Urbilder von Punkten in M unter $\mathbb{F}L$ zusammenhängend sind, dann können wir zeigen, dass die Funktion $v \mapsto \mathbb{F}L(v)v - L(v)$ auf dem Urbild eines Punktes $\alpha \in M$ konstant ist. Sei dazu $v_1, v_2 \in \mathbb{F}L^{-1}(\alpha)$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}L^{-1}(\alpha)$ eine differenzierbare Kurve² von v_1 nach v_2 . Dann folgt³

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbb{F}L(\gamma(t))\gamma(t) - L(\gamma(t)) \right) = \alpha(\dot{\gamma}(t)) - \mathbb{F}L(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0.$$

Damit ist H durch die obige Gleichung auf M wohldefiniert. Indem wir die kanonische symplektische Form ω_0 von T^*Q auf M zurückziehen, $\omega := i^*\omega_0$, wird (M, ω) zu einer präsymplektischen

²Wir nehmen hier also zusätzlich an, dass je zwei Punkte von $\mathbb{F}L^{-1}(\alpha)$ durch eine differenzierbare Kurve verbunden werden können.

³Man beachte beim Differenzieren von $L(\gamma(t))$, dass die Kurve γ immer im Tangentialraum über dem gleichen Punkt verläuft.

Mannigfaltigkeit. Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen sind jetzt Kurven $\gamma : I \rightarrow M$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$, die die Gleichung $i_{\dot{\gamma}(t)}\omega = dH$ erfüllen. Dies entspricht der Gleichung

$$(\dot{\gamma}(t), dH) \in L$$

zu dem impliziten Hamiltonschen System (M, L, H) mit $L = \text{graph}(\omega)$. Wir wollen jetzt zusätzlich annehmen, dass $\ker(\omega)$ konstante Dimension hat. Da ω im Allgemeinen ausgeartet ist, können wir nicht mehr damit rechnen, dass durch jeden Punkt von M Lösungen dieser Gleichung führen. Dirac gab in [15] ein Verfahren an, wie zusätzliche Zwangsbedingungen eingeführt werden können, so dass auf einem dadurch weiter eingeschränkten Phasenraum das Hamiltonsche Vektorfeld $i_{X_H}\omega = dH$ an jedem Punkt existiert. (Siehe auch [23, 44] für eine Darstellung dieses Verfahrens sowie [22] für eine geometrische Beschreibung.)

Die Menge der zulässigen Funktionen auf M bzgl. der Dirac-Struktur $L = \text{graph}(\omega)$ ist gegeben durch

$$\{f \in C^\infty(M) \mid df \in \rho^*(L) = (L \cap TM)^\circ = (\ker \omega)^\circ\}.$$

Die zulässigen Funktionen sind also die Funktionen, die entlang der charakteristischen Distribution $\ker(\omega)$ konstant sind und auf diesen ist damit eine Poisson-Klammer definiert.

Sei nun $N \xrightarrow{j} M$ die durch den Dirac-Algorithmus gewonnene Teilmenge von M , die wir als glatte Untermannigfaltigkeit annehmen wollen. Nach Konstruktion von N können wir jetzt die Gleichung

$$i_{X_H}\omega = dH$$

eingeschränkt auf N mit $X_H \in TN$ lösen. Man beachte, dass dies nicht damit übereinstimmt, die Gleichung $i_{X_H}j^*\omega = j^*dH$ zu lösen. X_H ist im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig bestimmt. Lokal können wir die Bestimmung von X_H auch auf das Lösen der Gleichung

$$i_{X_H}\omega_0 = d\tilde{H}$$

zurückführen, wobei \tilde{H} eine lokale Fortsetzung von H auf T^*Q ist. Um dies einzusehen, wählen wir eine offene Umgebung $U \subseteq T^*Q$ von $p \in N$ und Funktionen $\phi_1, \dots, \phi_k \in C^\infty(U)$ derart, dass

$$M \cap U = \bigcap_{i=1}^k \phi_i^{-1}(0)$$

und die $d\phi_i$ auf U linear unabhängig sind. Sei nun H' eine beliebige Fortsetzung von $H|_{U \cap M}$ auf U . Man kann zeigen [23, Appendix 1.A], dass jede lokale Fortsetzung von H durch

$$\tilde{H} = H' + \lambda_i \phi_i$$

mit $\lambda_i \in C^\infty(T^*Q)$ gegeben ist. Betrachten wir also die Gleichung

$$i_{X_H}\omega_0 = d\tilde{H} = dH' + \lambda_i d\phi_i,$$

die jetzt für jedes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ eine eindeutige Lösung hat, so ist durch die Forderung $X_H \in TN$, die nach Konstruktion von N auch erfüllt werden kann, die Freiheit bei der Wahl der λ_i 's auf $\dim \ker(\omega)$ Parameter eingeschränkt. Ist M koisotrop und damit $\ker(\omega) = TM \cap TM^\perp = TM^\perp$, so bleiben alle λ_i 's frei wählbar. Ist dagegen M symplektisch, also $\ker(\omega) = 0$, so sind alle λ_i 's eindeutig bestimmt.

2 Lie-Algebroid-Deformation

Die formale Deformationstheorie von kommutativen Algebren wurde in [20] von Gerstenhaber vorgestellt und später auf Lie-Algebren und weitere Strukturen wie symplektische Formen und Poisson-Tensoren erweitert. Die Betrachtung im Rahmen der formalen Potenzreihen (siehe Anhang B) ermöglicht dabei eine rein algebraische Beschreibung. Zwar ist in physikalischen Anwendungen im Allgemeinen eine glatte Deformationstheorie zu fordern, also beispielsweise eine Deformation π_t einer Poisson-Struktur $\pi = \pi_0$, die glatt von dem Parameter t abhängt. Eine systematische Untersuchung glatter Deformationen ist jedoch sehr kompliziert und nur in einigen besonders einfachen Fällen wirklich konkret durchführbar. Man betrachtet deshalb zunächst die formale Deformationstheorie, um zumindest etwaige Obstruktionen für die Deformierbarkeit zu bestimmen. In einem zweiten Schritt wäre dann der Übergang zur glatten Deformationstheorie zu vollziehen, was sich aber, wie gesagt, in den meisten Fällen als außerordentlich schwierig wenn nicht gar unmöglich herausstellt.

In der Physik spielt die Deformationstheorie die Rolle einer Störungstheorie zur dynamischen oder kinematischen Stabilitätsanalyse. Bei der dynamischen Stabilitätsanalyse betrachtet man eine Deformation der die Dynamik generierenden Hamiltonfunktion bzw. des Hamiltonschen Vektorfeldes. Als Beispiel sei hier das Kolmogorov-Arnold-Moser-Theorem (KAM-Theorem) zur Störung integrierbarer Systeme genannt, siehe z.B. [46]. Die Deformationen, die wir betrachten, dienen dagegen zur kinematischen Stabilitätsanalyse. Im Gegensatz zu dem eben erwähnten dynamischen Fall betrachten wir dabei nicht Störungen der Hamiltonfunktion, sondern Deformationen der Bewegungsgleichungen selbst. Ein derartiges Vorhaben mag zunächst verwundern, da ja die Bewegungsgleichungen Teil der physikalischen Theorie sind und normalerweise nicht als mit Messfehlern behaftet angesehen werden. Doch kann beispielsweise der Übergang von der nichtrelativistischen Mechanik zur speziellen Relativitätstheorie als Anwendung einer Deformationstheorie betrachtet werden. Das Objekt, das dabei deformiert wird, ist die Galileigruppe, und es ist ja durchaus ein Ergebnis von Messungen, dass diese Gruppe als Transformationsgruppe in der Mechanik Verwendung findet. Und tatsächlich stellt sich bei noch genaueren Messungen heraus, dass die Galileigruppe die Transformationen nur näherungsweise beschreibt. Die Deformationstheorie der Galileigruppe zeigt andererseits, dass diese Gruppe nicht stabil unter Deformationen ist, d.h. wir können die Galileigruppe auf nichttriviale Weise deformieren, wobei der Deformationsparameter die Rolle von $\frac{1}{c}$ mit der Lichtgeschwindigkeit c spielt. Damit erhalten wir zumindest einen Hinweis darauf, dass die Galileigruppe einer genügend genauen experimentellen Prüfung möglicherweise nicht standhält. Andererseits stellt sich die Lorentzgruppe als stabil unter (physikalisch sinnvollen) Deformationen heraus und wir erhalten einen guten Anhaltspunkt dafür, dass die spezielle Relativitätstheorie auch weiteren Prüfungen standhält.

Ein zweites Beispiel für eine Deformationstheorie ist die Deformationsquantisierung. Dabei wird das kommutative Produkt der klassischen Observablen auf dem Phasenraum unter Beachtung gewisser physikalischer Nebenbedingungen zu einem nichtkommutativen Produkt deformiert. Auch hier liefert die Instabilität der klassischen Observablenalgebra einen Hinweis darauf, dass sich die klassische Theorie bei ausreichend genauer Messung als nicht haltbar erweist. Als

deformierte Theorie erhält man dann eine mögliche Quantisierung und die Rolle des Deformationsparameters wird von \hbar übernommen.

Diese Beispiele zeigen, dass die Beschäftigung mit Deformationstheorien auch für die Physik fruchtbar ist. Im folgenden werden wir deshalb die Deformationstheorie von Lie-Algebroiden studieren. Lie-Algebroiden treten in der Physik an verschiedenen Stellen auf. Sei beispielsweise ein Phasenraum M gegeben, auf dem eine Symmetriegruppe G operiert. Indem wir zu den infinitesimalen Erzeugern dieser Gruppe, also ihrer Lie-Algebra \mathfrak{g} , übergehen, lässt sich diese Operation als eine Abbildung $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \Gamma^\infty(TM)$ beschreiben. Das Wirkungs-Lie-Algebroid zu der Wirkung ϕ ist dann durch $E = M \times \mathfrak{g}$ gegeben. Zur Definition der Lieklammer auf $\Gamma^\infty(E)$ sowie des Ankers siehe z.B. [10, Abschnitt 16.2]. Damit ist die gesamte Information, die in Phasenraum, Symmetriegruppe und in der Art der Wirkung enthalten sind, in einem einzigen Objekt, dem Wirkungs-Lie-Algebroid, enthalten. Da wir am Beispiel der Galileigruppe bereits gesehen haben, dass sich die Untersuchung der Deformation von Liegruppen physikalisch auszahlen kann, sollte es nicht verwundern, wenn selbiges auch auf die Deformation von Lie-Algebroiden zutrifft.

Lie-Algebroiden treten aber auch in der Form von integrablen Unterbündeln $E \subseteq TM$ des Tangentialbündels auf, wobei $E^\circ \subseteq T^*M$ die Zwangsfläche zu in den Impulsen linearen Zwangsbedingungen ist, siehe [17].

Die Deformationstheorie von Lie-Algebroiden sollte damit hinreichend motiviert sein. Zunächst wollen wir aber zur Einführung die Deformationstheorie von Liealgebren nach Gerstenhaber untersuchen.

2.1 Deformationen von Lie-Algebren

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Wir bezeichnen für $n > 0$ mit $\mathcal{M}^n(V) = \bigotimes^n V^* \otimes V$ die multilinearen und mit $\mathcal{A}^n(V) = \bigwedge^n V^* \otimes V$ die antisymmetrischen multilinearen Abbildungen $f : V \times \dots \times V \rightarrow V$. Weiter sei $\mathcal{M}^0(V) = \mathcal{A}^0(V) = V$ sowie $\mathcal{M}^n(V) = \mathcal{A}^n(V) = \{0\}$ für $n < 0$. Schließlich definieren wir

$$\mathcal{M}^\bullet(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}^n(V)$$

sowie

$$\mathcal{A}^\bullet(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^n(V).$$

Eine Algebra-Struktur auf V definiert damit ein Element in $\mathcal{M}^2(V)$. Ist $V = \mathfrak{g}$ eine Liealgebra, dann ist durch die Lieklammer gemäß $\mu(x, y) = [x, y]$ ein Element $\mu \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{g})$ gegeben.

Es soll nun auf $\mathcal{M}^\bullet(V)$ bzw. auf $\mathcal{A}^\bullet(V)$ eine Algebra-Struktur erklärt werden, mit der im ersten Fall die Assoziativität und im zweiten Fall die Jacobi-Identität für eine auf V vorhandene Algebra-Struktur kontrolliert werden kann. Die folgende Konstruktion geht zurück auf Gerstenhaber [20, 21]. Man beachte, dass dafür nur die Vektorraumstruktur von V benutzt wird. Wir definieren zunächst für $f \in \mathcal{M}^m(V)$ und $g \in \mathcal{M}^n(V)$ sowie $1 \leq i \leq m$ eine Verknüpfung \circ_i durch

$$(f \circ_i g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) := f(x_1, \dots, x_{i-1}, g(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{m+n-1})$$

wobei $x_1, \dots, x_{m+n-1} \in V$, und definieren dann das Gerstenhaber-Produkt als

$$f \circ g := \sum_{i=1}^m (-1)^{(i-1)(n-1)} f \circ_i g,$$

sowie für $f \in \mathcal{A}^m(V)$, $g \in \mathcal{A}^n(V)$ das antisymmetrisierte Gerstenhaber-Produkt durch

$$(f \diamond g)(x_1, \dots, x_{m+n-1}) = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} f(g(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}), x_{\pi(n+1)}, \dots, x_{\pi(n+m-1)}),$$

wobei die Summe über alle $(n, m-1)$ -Shuffles¹ geht. Man überlegt sich leicht, dass $f \diamond g$ bis auf einen Vorfaktor tatsächlich die Antisymmetrisierung von $f \circ g$ ist.

Die so erhaltenen Produkte sind zwar im allgemeinen nicht assoziativ, dennoch lässt sich zeigen, dass durch die Gerstenhaberklammer

$$[f, g]_{\mathcal{G}} = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \circ f$$

eine Super-Lieklammer auf $\mathcal{M}^{\bullet}(V)$ bzw. durch die Nijenhuis-Richardson-Klammer [38]

$$[f, g]_{\mathcal{NR}} = f \diamond g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \diamond f$$

eine Super-Lieklammer auf $\mathcal{A}^{\bullet}(V)$ definiert ist. Ist $\mu \in \mathcal{M}^2(V)$, so ist μ assoziativ genau dann, wenn $[\mu, \mu]_{\mathcal{G}} = 0$. Ist $\mu \in \mathcal{A}^2(V)$, so erfüllt μ die Jacobi-Identität genau dann, wenn $[\mu, \mu]_{\mathcal{NR}} = 0$.

Im weiteren beschränken wir uns auf den antisymmetrischen Fall. Sei also durch $\mu \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{g})$ eine Lieklammer $[\cdot, \cdot]$ auf \mathfrak{g} gegeben, d.h. $[\mu, \mu]_{\mathcal{NR}} = 0$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \delta_{\mu} : \mathcal{A}^{\bullet}(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathcal{A}^{\bullet+1}(\mathfrak{g}) \\ f &\longmapsto [\mu, f]_{\mathcal{NR}}, \end{aligned}$$

und mit der Super-Jacobi-Identität zeigt man unter Verwendung von $[\mu, \mu]_{\mathcal{NR}} = 0$ die Gleichung $\delta_{\mu}^2 = 0$. Mit einer kleinen Rechnung folgt, dass für $f \in \mathcal{A}^n(\mathfrak{g})$ die Beziehung $\delta_{\mu} f = (-1)^n \delta_{\text{CE}} f$ gilt, wobei δ_{CE} das Chevalley-Eilenberg-Differential zu μ ist,

$$\begin{aligned} \delta_{\text{CE}} f(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \mu(x_i, f(x_1, \overset{i}{\cdot}, x_{n+1})) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{i+j} f(\mu(x_i, x_j), x_1, \overset{i}{\cdot}, \overset{j}{\cdot}, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt für eine Folge $\mu_i \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{g})$ eine formale Deformation $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + t^2\mu_2 + \dots \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{g})[[t]]$ von $\mu_0 = [\cdot, \cdot]$, der Lieklammer auf \mathfrak{g} . μ_t erfüllt die Jacobi-Identität genau dann, wenn

$$[\mu_t, \mu_t]_{\mathcal{NR}} = 0$$

¹Eine Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(p) & \pi(p+1) & \dots & \pi(p+q) \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p+q}$$

ist ein (p, q) -Shuffle, wenn die Zahlen $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p)$ und $\pi(p+1), \pi(p+2), \dots, \pi(p+q)$ aufsteigend geordnet sind.

gilt. Diese Bedingung in den einzelnen Ordnungen von t ausgewertet führt auf ein System von Gleichungen

$$\begin{aligned} t^0 : \quad & [\mu_0, \mu_0]_{\mathcal{NR}} = 0 \\ t^1 : \quad & [\mu_0, \mu_1]_{\mathcal{NR}} + [\mu_1, \mu_0]_{\mathcal{NR}} = -2\delta\mu_1 = 0 \\ t^k, k \geq 2 : \quad & [\mu_0, \mu_k]_{\mathcal{NR}} + [\mu_1, \mu_{k-1}]_{\mathcal{NR}} + \dots + [\mu_k, \mu_0]_{\mathcal{NR}} = -2\delta\mu_k + \sum_{i=1}^{k-1} [\mu_i, \mu_{k-i}]_{\mathcal{NR}} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir jetzt kurz δ für δ_{μ_0} schreiben.

Zunächst folgt aus der ersten Gleichung $[\mu_0, \mu_0]_{\mathcal{NR}} = 0$, dass μ_0 die Jacobi-Identität erfüllen muss, d.h. die undeformierte Klammer muss bereits eine Lieklammer sein. Die zweite Gleichung $\delta\mu_1 = 0$ bedeutet, dass μ_1 ein Chevalley-Eilenberg-Kozyklus sein muss. Angenommen, man hat bereits μ_0, \dots, μ_{k-1} gefunden, so dass die obigen Gleichungen bis zur Ordnung $k-1$ erfüllt sind. Die Frage ist, ob die Deformation mit einem μ_k bis zur Ordnung k fortgesetzt werden kann. Es ist also die Gleichung

$$2\delta\mu_k = \sum_{i=1}^{k-1} [\mu_i, \mu_{k-i}]_{\mathcal{NR}}$$

zu lösen. Dies ist nur möglich, wenn die rechte Seite der Gleichung ein Kozyklus ist. Mit Hilfe der Super-Jacobi-Identität für die Klammer $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{NR}}$ sowie der Gültigkeit der Gleichungen für die niedrigeren Ordnungen lässt sich jedoch tatsächlich zeigen, dass $\sum_{i=1}^{k-1} [\mu_i, \mu_{k-i}]_{\mathcal{NR}}$ geschlossen ist. Für die Lösbarkeit der Gleichung ist es aber notwendig, dass die auftretende Summe exakt ist. Es ergibt sich also eine Obstruktion in der dritten Chevalley-Eilenberg-Kohomologie $H_{\text{CE}}^3(\mathfrak{g})$ für unser Deformationsproblem.

2.1.1 Triviale Deformationen

Definition 2.1.1. Sei $\mu_0 \in \mathcal{A}^2(\mathfrak{g})$ eine Liealgebrastruktur auf \mathfrak{g} .

1. Zwei formale Deformationen $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + \dots$ und $\mu'_t = \mu_0 + t\mu'_1 + \dots$ von μ_0 heißen äquivalent, wenn es eine $\mathbb{R}[[t]]$ -lineare Abbildung

$$\phi_t = \text{id} + t\phi_1 + \dots : \mathfrak{g}[[t]] \longrightarrow \mathfrak{g}[[t]]$$

gibt, so dass

$$\mu'_t(x, y) = \phi_t^{-1}(\mu_t(\phi_t(x), \phi_t(y)))$$

als Gleichung in formalen Potenzreihen.

2. Eine Deformation $\mu_t = \mu_0 + t\mu_1 + \dots$ heißt trivial, wenn μ_t äquivalent zu μ_0 ist.

Sind μ_t und μ'_t äquivalente Deformationen, so erhalten wir, indem wir die Bedingung für Äquivalenz in erster Ordnung von t betrachten, die Gleichung

$$\mu'_1 - \mu_1 = [\mu_0, \phi_1]_{\mathcal{NR}} = \delta\phi_1,$$

d.h. μ'_1 und μ_1 definieren das gleiche Element in $H_{\text{CE}}^2(\mathfrak{g})$. Es gilt nun das folgende

Lemma 2.1.2 ([21, Prop. 1]). *Sei μ_t eine formale Deformation von μ_0 . Dann ist μ_t äquivalent zu einer Deformation $\mu'_t = \mu_0 + t^n\mu'_n + \dots$, wobei das erste nicht verschwindende μ'_n geschlossen, jedoch nicht exakt ist.*

Beweis. Ist $\mu'_n = \delta\phi_n$ exakt, so liefert $\phi_t = \text{id} + t^n \phi_n$ eine Äquivalenztransformation auf eine Deformation der Form $\mu_0 + t^{n+1}\mu''_{n+1} + \dots$ \square

Damit ergibt sich die

Folgerung 2.1.3. Ist $H^2_{\text{CE}}(\mathfrak{g}) = 0$, so ist \mathfrak{g} starr, d.h. alle formalen Deformationen sind trivial.

2.2 Lie-Algebroid-Strukturen als Multiderivationen

Wir wollen jetzt versuchen, die Konstruktion von Gerstenhaber auf Lie-Algebroiden anzuwenden. Dabei folgen wir [13]. Die direkte Übertragung der obigen Überlegungen würde nur zu einer Deformation der Lie-Algebra-Struktur auf $\Gamma^\infty(E)$ führen, die Leibniz-Regel wäre im Allgemeinen für die deformierte Klammer allerdings nicht mehr erfüllt. Es zeigt sich jedoch, dass die Gerstenhaberkonstruktion, angewandt auf einen Unterkomplex von $\mathcal{A}^\bullet(\Gamma^\infty(E))$, das gewünschte liefert. Dieser Unterkomplex ist der Komplex der Multiderivationen $\text{Der}^\bullet(E)$ von E , den wir jetzt vorstellen wollen.

Definition 2.2.1. Eine Multiderivation vom Grad $n \geq 0$ ist eine antisymmetrische, multilineare Abbildung

$$D : \underbrace{\Gamma^\infty(E) \times \dots \times \Gamma^\infty(E)}_{n+1 \text{ mal}} \longrightarrow \Gamma^\infty(E)$$

derart, dass es eine Abbildung

$$\sigma_D : \underbrace{\Gamma^\infty(E) \times \dots \times \Gamma^\infty(E)}_{n \text{ mal}} \longrightarrow \Gamma^\infty(TM)$$

gibt, so dass für $X_0, \dots, X_n \in \Gamma^\infty(E), f \in C^\infty(M)$ die Gleichung

$$D(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, fX_n) = fD(X_0, \dots, X_n) + \sigma_D(X_0, \dots, X_{n-1})(f)X_n$$

gilt. Wir nennen σ_D das Symbol von D . Für $n \geq 0$ sei $\text{Der}^n(E)$ der Raum der Multiderivationen auf E . Weiter setzen wir $\text{Der}^{-1}(E) = \Gamma^\infty(E)$ sowie $\text{Der}^n(E) = \{0\}$ für $n \leq -2$. Schließlich sei

$$\text{Der}^\bullet(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Der}^n(E).$$

Die Abbildung σ_D ist offensichtlich ebenfalls antisymmetrisch. Man kann weiter zeigen, dass für Vektorbündel mit Faserdimension ≥ 2 folgt, dass σ_D sogar $C^\infty(M)$ -linear ist, also

$$\sigma_D \in \Gamma^\infty(\bigwedge^n E^* \otimes TM).$$

Für Faserdimension $= 1$ ist ohnehin $\text{Der}^k(E) = 0$ für $k > 0$, so dass nur Symbole $\sigma \in \mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM)$ auftauchen.

Wir übertragen jetzt die Gerstenhaberkonstruktion auf $\text{Der}^\bullet(E)$. Dabei wählen wir gemäß [13] eine vom vorherigen Abschnitt leicht abweichende Normierung und Vorzeichenkonvention. Für $D_1 \in \text{Der}^p(E)$ und $D_2 \in \text{Der}^q(E)$ setzen wir das Gerstenhaberprodukt fest als

$$D_1 \circ D_2(s_0, \dots, s_{p+q}) = \sum_{\pi} (-1)^\pi D_1(D_2(s_{\pi(0)}, \dots, s_{\pi(q)}), s_{\pi(q+1)}, \dots, s_{\pi(p+q)}),$$

wobei die Summe über alle $(q+1, p)$ -Shuffles läuft. Die Super-Lieklammer ist jetzt

$$[D_1, D_2]_{CM} = (-1)^{pq} D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1,$$

was bis auf ein Supervorzeichen der Nijenhuis-Richardson-Klammer, eingeschränkt

auf die Multiderivationen $Der^\bullet(E)$, entspricht. Man kann zeigen, dass mit $D_1 \in Der^p(E)$ und $D_2 \in Der^q(E)$ folgt, dass $[D_1, D_2]_{CM} \in Der^{p+q}(E)$ gilt, d.h. $Der^\bullet(E)$ ist unter der Gerstenhaberklammer abgeschlossen. Genauer rechnet man nach, dass

$$\sigma_{[D_1, D_2]_{CM}} = (-1)^{pq} \sigma_{D_1} \circ D_2 - \sigma_{D_2} \circ D_1 + [\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}],$$

wobei

$$\sigma_{D_1} \circ D_2(s_1, \dots, s_{p+q}) = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \sigma_{D_1}(D(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(q+1)}), s_{\pi(q+2)}, \dots, s_{\pi(p+q)})$$

mit der Summe über alle $(q+1, p)$ -Shuffles, sowie

$$[\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}](s_1, \dots, s_{p+q}) = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} [\sigma_{D_1}(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(p)}), \sigma_{D_2}(s_{\pi(p+1)}, \dots, s_{\pi(p+q)})],$$

summiert über alle (p, q) -Shuffles.

Wegen $Der^n(E) \subseteq \mathcal{A}^{n+1}(\Gamma^\infty(E))$ ist damit klar, dass $(Der^\bullet(E), [\cdot, \cdot]_{CM})$ eine gradierte Liealgebra ist, und dass ein Element $m \in Der^1(E)$ genau dann eine Liealgebra-Struktur auf $\Gamma^\infty(E)$ definiert, wenn $[m, m]_{CM} = 0$ gilt. Tatsächlich ist in diesem Fall durch m sogar eine Lie-Algebroid-Struktur auf E gegeben, wobei der Anker $\rho = \sigma_m$ das Symbol von m ist. Die Leibniz-Identität ist dabei bereits durch die Voraussetzung $m \in Der^1(E)$ erfüllt.

Gegeben ein Element $m \in Der^1(E)$ mit $[m, m]_{CM} = 0$, so definieren wir eine Abbildung $\delta_m : Der^k(E) \rightarrow Der^{k+1}(E)$ durch $D \mapsto [m, D]_{CM}$, wobei mit der Super-Jacobi-Identität für $[\cdot, \cdot]_{CM}$ wieder $\delta_m^2 = 0$ folgt. Wir erhalten also einen Kokettenkomplex

$$Der^{-1}(E) \xrightarrow{\delta_m} Der^0(E) \xrightarrow{\delta_m} Der^1(E) \xrightarrow{\delta_m} Der^2(E) \xrightarrow{\delta_m} \dots$$

sowie die dazugehörigen Kohomologieklassen, die wir hier mit $H_{m, CM}^k(E)$ für Crainic-Moerdijk bezeichnen wollen. Durch eine kleine Rechnung erhalten wir für $D \in Der^p(E)$ die Gleichung

$$\sigma_{\delta_m(D)} = \sigma_{[m, D]_{CM}} = \delta(\sigma_D) + (-1)^p \rho \circ D,$$

wobei jetzt

$$\begin{aligned} \delta(\sigma_D)(s_1, \dots, s_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} [\rho(s_i), \sigma_D(s_1, \overset{i}{\dots}, s_{p+1})] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma_D([s_i, s_j], s_1, \overset{i}{\dots}, \overset{j}{\dots}, s_{p+1}). \end{aligned}$$

gemeint ist.

Bemerkung 2.2.2. Ist $E = TM$ mit $m \in Der^1(TM)$ der Lieklammer auf Vektorfeldern und $\rho = \text{id}$, dann gilt $\sigma_D \in Der^{p-1}(TM)$ sowie $\delta(\sigma_D) = \delta_m(D) = [m, D]_{CM}$, also

$$\sigma_{\delta_m(D)} = \delta_m(\sigma_D) + (-1)^p D$$

woraus sofort folgt

$$H_{m, CM}^p(TM) = 0.$$

Wie vorher bei der Deformation von Lie-Algebren betrachten wir eine formale Reihe $m_t = m_0 + tm_1 + t^2m_2 + \dots \in \text{Der}^1(E)[[t]]$ und fordern $[m_t, m_t]_{CM} = 0$. Analog zu den Überlegungen im vorherigen Abschnitt erhalten wir, dass die Obstruktionen für die Deformationen in $H^2_{m_0, CM}(E)$ zu suchen sind.

2.3 Deformationen linearer Poisson-Strukturen

Ein Lie-Algebroid $(\pi : E \rightarrow M, [\cdot, \cdot]_E, \rho)$ definiert bekanntlich eine Poisson-Struktur auf dem dualen Bündel $\tau : E^* \rightarrow M$. Bezeichnet man mit $\hat{s} = \mathcal{J}(s) \in C^\infty(E^*)$ die durch $s \in \Gamma^\infty(E)$ gegebene faserweise lineare Funktion auf E^* , und sei \mathcal{I}_0 die Umkehrabbildung dazu, so ist die Poisson-Struktur auf E^* durch die Forderung der Gleichung

$$\mathcal{I}_0(\{\hat{s}_1, \hat{s}_2\}) = [s_1, s_2]_E, \quad s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(E)$$

sowie der Leibnizregel für die Poisson-Klammer eindeutig bestimmt. Es gilt dann mit $f, g \in C^\infty(M), s \in \Gamma^\infty(E)$

$$\{\hat{s}, \tau^* f\} = \tau^*(\rho(s)f), \quad \{\tau^* f, \tau^* g\} = 0.$$

Poisson-Strukturen dieser Art können durch das Eulervektorfeld charakterisiert werden. Dabei ist für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ das Eulervektorfeld $\xi \in \Gamma^\infty(TE)$ definiert als das Vektorfeld zu dem Fluss $\Phi_t^\xi(v_m) = e^t v_m, v_m \in E_m = \pi^{-1}(m)$. Ist nun $P \in \mathfrak{X}^2(E^*) = \Gamma^\infty(\wedge^2 TE^*)$ der Poisson-Tensor zu der Poisson-Struktur auf E^* , so lässt sich zeigen, dass $\mathcal{L}_\xi P = -P$ gilt (siehe z.B. [35, Prop. 5.3.3] und Abschnitt 2.3.2).

2.3.1 Homogene Multivektorfelder

Wir wollen unsere Betrachtungen ein wenig verallgemeinern und machen dazu folgende Definition.

Definition 2.3.1. Seien $p, k \in \mathbb{Z}$. Die Multivektorfelder $X \in \mathfrak{X}^p(E) = \Gamma^\infty(\wedge^p TE^*)$ mit

$$\mathcal{L}_\xi X = kX$$

heißen homogen vom Grad k . Als Bezeichnung sei

$$\mathfrak{X}^{p,k}(E) = \{X \in \mathfrak{X}^p(E) \mid \mathcal{L}_\xi X = kX\}$$

vereinbart.

Bemerkung 2.3.2. Es gilt $\mathfrak{X}^{p,k}(E) = 0$ für $k < -p$. Zur Begründung überlegt man sich zunächst, dass für Funktionen $f \in C^\infty(E) = \mathfrak{X}^0(E)$ die Differentialgleichung $\mathcal{L}_\xi f = k\xi$ nur für $k \geq 0$ auf ganz E glatte Lösungen hat. Seien x^i, v^α lokale Koordinaten von E , wobei die x^i durch Koordinaten auf M induziert und die v^α durch eine passende lokale Trivialisierung gegeben sind. Dann gilt

$$\mathcal{L}_\xi \frac{\partial}{\partial x^i} = 0, \quad \mathcal{L}_\xi \frac{\partial}{\partial v^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial v^\alpha}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\xi \left(f \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_s}} \right) \\ &= (\mathcal{L}_\xi f) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_s}} \\ & \quad - sf \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_s}}. \end{aligned}$$

Da Funktionen mindestens den Homogenitätsgrad Null haben, folgt daraus die Behauptung.

Man sieht leicht, dass $f \in C^\infty(E)$ genau dann faserweise konstant ist, wenn $\mathcal{L}_\xi f = 0$ gilt. Es gibt dann eine eindeutig bestimmte Funktion $g \in C^\infty(M)$ mit $f = \pi^*g$.

Lokal ist jedes $P \in \mathfrak{X}^{p,k}(E)$ Summe von Termen der Form

$$f^{i_1 \dots i_{p-r} \alpha_1 \dots \alpha_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{p-r}}} \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{\alpha_r}}$$

mit $r \geq -k$ und $f^{i_1 \dots i_{p-r} \alpha_1 \dots \alpha_r} \in \mathfrak{X}^{0,k+r}(E)$.

Lemma 2.3.3. *Sei $p, k, r \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$, $k \geq -p$ und $0 \leq r \leq p$ sowie $X \in \mathfrak{X}^{p,k}(E)$. Seien weiter $f_1, \dots, f_r \in C^\infty(M)$ Funktionen auf M und $s_1, \dots, s_{p-r} \in \mathfrak{X}^{0,1}(E)$ lineare Funktionen auf E . Dann gilt*

$$i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \in \mathfrak{X}^{0,p+k-r}(E)$$

und damit für $r > p + k$

$$i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) = 0$$

Beweis. Man überlegt sich leicht, dass $\mathcal{L}_\xi \pi^*df_i = 0$ sowie $\mathcal{L}_\xi ds_i = ds_i$ gilt. Mit der Identität $[\mathcal{L}_\xi, i_X] = i_{[\xi, X]}$ rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_\xi i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \\ &= i_{[\xi, X]}(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \\ & \quad + i_X \mathcal{L}_\xi(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \\ &= k i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \\ & \quad + (p-r) i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \\ &= (p+k-r) i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$i_X(\pi^*df_1 \wedge \dots \wedge \pi^*df_r \wedge ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p-r}) \in \mathfrak{X}^{0,p+k-r}(E)$$

und der betrachtete Ausdruck ist für $r > p + k$ gleich Null. \square

Bemerkung 2.3.4. Sei $P \in \mathfrak{X}^{p,k}(M)$ mit $-p \leq k \leq 0$. Dann folgt mit dem eben gezeigten Lemma, dass P lokal bereits durch Angabe von

$$\begin{aligned} & P(dv^{\alpha_1}, \dots, dv^{\alpha_p}) \\ & \quad \vdots \\ & P(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_{p+k}}, dv^{\alpha_1}, \dots, dv^{\alpha_{-k}}) \end{aligned}$$

bestimmt ist, wobei wie oben die x^i durch eine Karte auf M und die $v^\alpha \in \mathfrak{X}^{0,1}(E)$ durch eine Vektorbündelkarte gegeben sind.

Lemma 2.3.5. *Sei $X \in \mathfrak{X}^{1,0}(E)$ ein vollständiges lineares Vektorfeld und sei Φ_t der dazugehörige lokale Fluss. Dann ist Φ_t ein Vektorbündelisomorphismus, d.h. Φ_t bildet Fasern wieder auf Fasern ab, und es gilt für $x \in M$, $v, w \in E_x$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ die Gleichung*

$$\Phi_t(\alpha v + w) = \alpha \Phi_t(v) + \Phi_t(w).$$

Ist umgekehrt Φ_t ein t -abhängiger Vektorbündelisomorphismus, so ist durch

$$X_s(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Phi_t(\Phi_s^{-1}(v))$$

ein zeitabhängiges Vektorfeld $X_s \in \mathfrak{X}^{1,0}(E)$ definiert.

Beweis. Sei zunächst $X \in \mathfrak{X}^{1,0}(E)$. Wegen $\mathcal{L}_\xi X = [\xi, X] = 0$ vertauschen die zu den Vektorfeldern gehörenden Flüsse,

$$\Phi_t \circ \Phi_s^\xi = \Phi_s^\xi \circ \Phi_t$$

d.h. es gilt für $v \in E$ und alle $s \in \mathbb{R}$

$$\Phi_t(e^s v) = e^s \Phi_t(v).$$

Damit gilt also die Gleichung

$$\pi(\Phi_t(v)) = \pi(e^s \Phi_t(v)) = \pi(\Phi_t(e^s v)),$$

und wenn wir den Limes $s \rightarrow -\infty$ bilden, folgt mit der Stetigkeit der beteiligten Abbildungen

$$\pi(\Phi_t(v)) = \pi(\Phi_t(0)),$$

womit gezeigt ist, dass Φ_t Fasern auf Fasern abbildet. Außerdem folgt auch, dass für $\alpha \geq 0$

$$\Phi_t(\alpha v) = \alpha \Phi_t(v).$$

Da aber

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (-\Phi_t(v)) = -X(\Phi_t(v)) = X(-\Phi_t(v))$$

sowie $-\Phi_0(v) = -v$ und der Fluss eindeutig ist, gilt also

$$-\Phi_t(v) = \Phi_t(-v),$$

und die obige Gleichung gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Jetzt betrachten wir die Kurve

$$\gamma_t = \Phi_t(v + w) - \Phi_t(v) - \Phi_t(w),$$

die aufgrund der Fasertreue von Φ_t wohldefiniert ist. Wir wollen $\dot{\gamma}$ in einer Karte bestimmen, d.h. wir beschränken uns auf den Fall $E = U \times \mathbb{R}^k$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Seien x^i Koordinaten in U sowie v^α Koordinaten in \mathbb{R}^k . X hat dann die Gestalt

$$X(x, v) = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + b_\beta^\alpha(x) v^\beta \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$$

mit $a^i, b_\beta^\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. Den Fluss zu X schreiben wir als

$$\Phi_t(x, v) = (\phi_t(x, v), \Psi_t(x, v)),$$

so dass

$$\gamma_t = (\phi_t(x, v), \Psi_t(x, v + w) - \Psi_t(v) - \Psi_t(w)).$$

Zunächst folgt $\dot{\phi}_t(x, v) = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ und ϕ_t hängt damit nur von x ab. Weiter ist

$$\dot{\Psi}_t(x, v) = b_\beta^\alpha(\phi_t(x)) \Psi_t^\beta(x, v) \frac{\partial}{\partial v^\alpha}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_t &= a^i(\phi_t(x)) \frac{\partial}{\partial x^i} + b_\beta^\alpha(\phi_t(x)) \left(\Psi_t^\beta(x, v+w) - \Psi_t^\beta(x, v) - \Psi_t^\beta(x, w) \right) \frac{\partial}{\partial v^\alpha} \\ &= X(\phi_t(x), \Psi_t(x, v+w) - \Psi_t(x, v) - \Psi_t(x, w)) \\ &= X(\gamma_t), \end{aligned}$$

also ist γ_t eine Integralkurve von X mit Anfangswert $\gamma_0 = (x, 0)$. Nun ist aber $X|_M = a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \in TM$, d.h. M ist invariant unter dem Fluss Φ_t zu X . Somit ist $\gamma_t = (\phi_t(x), 0)$ für alle t , für die γ_t definiert ist. Die Kurve γ_t verläuft also im Nullschnitt des Bündels $U \times \mathbb{R}^k$. Das ist aber eine koordinatenunabhängige Aussage, so dass wir auch für nichttriviale Bündel erhalten, dass die Kurve γ_t im Nullschnitt verläuft, womit die erste Aussage des Lemmas bewiesen wäre. Die umgekehrte Richtung ist aber klar. \square

2.3.2 Lineare Poisson-Deformation

Sei nun $\pi \in \mathfrak{X}^{2,-1}(E^*)$ ein linearer Poisson-Tensor auf $\tau : E^* \rightarrow M$. Durch die Vorschrift

$$\widehat{[s_1, s_2]} = \{\hat{s}_1, \hat{s}_2\} = i_\pi(d\hat{s}_1 \wedge d\hat{s}_2), \quad s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(E)$$

ist eine Lieklammer auf den Schnitten von E definiert. Weiter definieren wir den Anker $\rho : E \rightarrow TM$ durch

$$\tau^*(\rho(s)f) = \{\hat{s}, \tau^*f\}.$$

Dass ρ dadurch wohldefiniert ist, folgt aus Lemma 2.3.3, denn damit gilt

$$\mathcal{L}_\xi\{\hat{s}, \tau^*f\} = \mathcal{L}_\xi i_\pi(d\hat{s} \wedge d\tau^*f) = 0.$$

Damit ist die Funktion $\{\hat{s}, \tau^*f\}$ faserweise konstant. Weiter gilt aufgrund von $\{\tau^*f, \tau^*g\} = i_\pi(\tau^*df \wedge \tau^*dg) = 0$, dass ρ sogar $C^\infty(M)$ -linear und damit tatsächlich ein Vektorbündelhomomorphismus ist. Man sieht leicht, dass $(E, [\cdot, \cdot], \rho)$ mit den obigen Definitionen ein Lie-Algebroid wird. Wir haben also eine eindeutige Beziehung zwischen Lie-Algebroid-Strukturen auf E und linearen Poisson-Strukturen auf E^* . Dies kann verallgemeinert werden zu der folgenden Aussage.

Proposition 2.3.6. *Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, und sei $\tau : E^* \rightarrow M$ das duale Bündel. Dann gibt es für jedes $k \geq 0$ einen Isomorphismus*

$$\mathcal{I}_k : \mathfrak{X}^{k,1-k}(E^*) \longrightarrow \text{Der}^{k-1}(E).$$

Dabei ist die Abbildung \mathcal{I}_0 das Inverse zu der Abbildung $s \mapsto \hat{s}$, die einem Schnitt $s \in \Gamma^\infty(E)$ die entsprechende lineare Funktion $\hat{s} \in \mathfrak{X}^{0,1}(E^)$ zuordnet. Für $k \geq 1$ ist \mathcal{I}_k für ein $P \in \mathfrak{X}^{k,1-k}(E^*)$ definiert durch*

$$\mathcal{I}_k(P)(s_1, \dots, s_k) = \mathcal{I}_0(i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{s}_k) \quad s_1, \dots, s_k \in \Gamma^\infty(E).$$

Weiter ist das Symbol $\sigma_{\mathcal{I}_k(P)}$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ durch

$$\sigma_{\mathcal{I}_k(P)}(s_1, \dots, s_{k-1})(f) = \mathcal{I}_0(i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{s}_{k-1} \wedge d\tau^*f)$$

gegeben.

Beweis. Zunächst überlegt man sich mit Hilfe von Lemma 2.3.3, dass für $P \in \mathfrak{X}^{k,1-k}(E^*)$ folgt, dass

$$i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{s}_k \in \mathfrak{X}^{0,1}(E^*),$$

und $\mathcal{I}_k(P)$ damit wohldefiniert ist. Weiter ist $\mathcal{I}_k(P)$ offensichtlich antisymmetrisch. Um die Derivationseigenschaft nachzurechnen, überlegt man sich zunächst für die Abbildungen $s \mapsto \hat{s}$ und ihr Inverses \mathcal{I}_0 die Gleichungen

$$\widehat{fs} = \tau^* f \hat{s} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{I}_0(\tau^* f \hat{s}) = f \mathcal{I}_0(\hat{s}).$$

Damit folgt jetzt

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(P)(s_1, \dots, fs_k) &= \mathcal{I}_0(i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d(\tau^* f \hat{s}_k)) \\ &= \mathcal{I}_0(\tau^* f i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\hat{s}_k + i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\tau^* f \hat{s}_k) \\ &= f \mathcal{I}_k(P)(s_1, \dots, s_k) + \sigma_P(s_1, \dots, s_{k-1})(f) s_k, \end{aligned}$$

wobei

$$\sigma_P(s_1, \dots, s_{k-1})(f) = \mathcal{I}_0(i_P d\hat{s}_1 \wedge \dots \wedge d\tau^* f)$$

mit der Kurzschreibweise σ_P für $\sigma_{\mathcal{I}_k(P)}$ gilt. Dabei folgt wieder mit Lemma 2.3.3, dass σ_P wohldefiniert ist. Weiter ist $\sigma_P(s_1, \dots, s_{k-1})$ eine Derivation von $C^\infty(M)$ und definiert deshalb ein Vektorfeld auf M . Indem man nochmals Lemma 2.3.3 zu Hilfe nimmt, sieht man, dass σ_P in den Argumenten s_1, \dots, s_{k-1} auch $C^\infty(M)$ -linear ist. Umgekehrt sieht man mit Bemerkung 2.3.4, dass für ein $D \in \text{Der}^{k-1}(E)$ mit Symbol σ_D durch die angegebenen Gleichungen eindeutig ein $P \in \mathfrak{X}^{k,1-k}(E^*)$ mit $\mathcal{I}(P) = D$ definiert ist, womit die Bijektivität von \mathcal{I} folgt. \square

Wollen wir jetzt die Deformation von Lie-Algebroiden untersuchen, so können wir äquivalent dazu auch die Deformation von linearen Poisson-Strukturen auf Vektorbündeln untersuchen. Aus der Deformationstheorie für Poisson-Mannigfaltigkeiten wissen wir, dass die zweite und dritte Poisson-Kohomologie mit den Deformationen zusammenhängen, siehe z.B. [10, 50]. Wir geben jetzt einen Unterkomplex an, der die Deformation von linearen Poisson-Strukturen regelt. Zunächst ein

Lemma 2.3.7. *Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und seien $P \in \mathfrak{X}^{p,k}(E)$, $Q \in \mathfrak{X}^{q,l}(E)$ homogene Multivektorfelder. Dann gilt*

$$[P, Q] \in \mathfrak{X}^{p+q-1, k+l}(E),$$

d.h. die homogenen Multivektorfelder sind unter der Schouten-Nijenhuis-Klammer abgeschlossen.

Beweis. Mit Hilfe des Eulervektorfeldes ξ rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi[P, Q] &= [\xi, [P, Q]] = [[\xi, P], Q] + [P, [\xi, Q]] \\ &= k[P, Q] + l[P, Q] \\ &= (k + l)[P, Q]. \end{aligned}$$

\square

Ist jetzt $\pi \in \mathfrak{X}^{2,-1}(E)$ ein linearer Poisson-Tensor, so gilt nach Lemma 2.3.7 für das zugehörige $d_\pi = [\pi, \cdot]$, dass

$$d_\pi(\mathfrak{X}^{p,k}(E)) \subseteq \mathfrak{X}^{p+1, k-1},$$

und wir erhalten für $k \geq 0$ die Unterkomplexe

$$\mathfrak{X}^{0,k}(E) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{X}^{1,k-1}(E) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{X}^{2,k-2}(E) \xrightarrow{d_\pi} \dots$$

Wir interessieren uns natürlich für den Komplex, der die linearen Bivektorfelder enthält, also

$$\mathfrak{X}^{0,1}(E) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{X}^{1,0}(E) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{X}^{2,-1}(E) \xrightarrow{d_\pi} \mathfrak{X}^{3,-2}(E) \xrightarrow{d_\pi} \dots$$

und die dazugehörige Kohomologieklassen

$$H_{\pi, \text{lin}}^k(E) = \frac{\ker(d_\pi : \mathfrak{X}^{k,1-k}(E) \longrightarrow \mathfrak{X}^{k+1,-k}(E))}{\text{im}(d_\pi : \mathfrak{X}^{k-1,2-k}(E) \longrightarrow \mathfrak{X}^{k,1-k}(E))}.$$

Sei nun $\pi_t = \pi_0 + t\pi_1 + t^2\pi_2 + \dots \in \mathfrak{X}^2(M)[[t]]$ eine formale Deformation von π_0 . Damit π_t ein linearer Poisson-Tensor ist, müssen die Gleichungen

$$[\pi_t, \pi_t] = 0 \quad \text{und} \quad L_\xi \pi_t = -\pi_t$$

gelten. Die erste Bedingung liefert wie üblich die Gleichungen

$$d_{\pi_0} \pi_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [\pi_i, \pi_{n-i}]$$

für die einzelnen π_n , die zweite Bedingung ist einfach

$$L_\xi \pi_n = -\pi_n.$$

Wenn wir aber die Lösungen der ersten Gleichung nicht in dem ganzen Poisson-Komplex suchen, sondern unseren Unterkomplex verwenden, ist die zweite Gleichung offenbar automatisch erfüllt. Damit liegt die Obstruktion für die Deformation von linearen Poisson-Strukturen in der dritten linearen Poisson-Kohomologie $H_{\pi_0, \text{lin}}^3(E)$.

Damit haben wir jetzt zwei äquivalente Möglichkeiten, wie die Bedingungen für die Existenz von Deformationen von Lie-Algebroiden beschrieben werden können. In der Tat gilt der folgende Satz.

Satz 2.3.8. *Seien $P \in \mathfrak{X}^{p,1-p}(E^*)$ und $Q \in \mathfrak{X}^{q,1-q}(E^*)$ Multivektorfelder. Dann gilt für die Abbildung*

$$\mathcal{I}_\bullet : \mathfrak{X}^{\bullet,1-\bullet}(E^*) \longrightarrow \text{Der}^{\bullet-1}(E)$$

die Gleichung

$$\mathcal{I}_{p+q-1}([P, Q]) = (-1)^{(p-1)(q-1)} [\mathcal{I}_p(P), \mathcal{I}_q(Q)]_{CM}.$$

Für den Beweis brauchen wir ein Lemma.

Lemma 2.3.9. *Sei M eine Mannigfaltigkeit, $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ und seien $\alpha_1 \dots \alpha_r \in \Omega^1(M)$, $r \geq p$ Einsformen. Dann gilt*

$$i_P \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r = \sum_{\pi} (-1)^\pi (i_P \alpha_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(p)}) \alpha_{\pi(p+1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(r)},$$

wobei die Summe über alle $(p, r-p)$ -Shuffles läuft.

Beweis. Sei $q = r - p$ und $Q \in \mathfrak{X}^q(E)$ beliebig. Dann gilt einerseits (Summen jeweils über alle (p, q) -Shuffles)

$$\begin{aligned}
 i_{P \wedge Q} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{p+q} &= (-1)^{\frac{p+q}{2}(p+q-1)} (P \wedge Q)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+q}) \\
 &= (-1)^{\frac{p+q}{2}(p+q-1)} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} P(\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(p)}) Q(\alpha_{\pi(p+1)}, \dots, \alpha_{\pi(p+q)}) \\
 &= (-1)^{pq} \sum_{\pi} (i_P \alpha_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(p)}) (i_Q \alpha_{\pi(p+1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(p+q)}) \\
 &= (-1)^{pq} i_Q \left(\sum_{\pi} (i_P \alpha_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(p)}) \alpha_{\pi(p+1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\pi(p+q)} \right).
 \end{aligned}$$

Andererseits ist aber

$$\begin{aligned}
 i_{P \wedge Q} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{p+q} &= (-1)^{pq} i_{Q \wedge P} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{p+q} \\
 &= (-1)^{pq} i_Q (i_P \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{p+q})
 \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. \square

Damit können wir jetzt den Satz beweisen.

Beweis. Seien also $P \in \mathfrak{X}^{p,1-p}(E^*)$ und $Q \in \mathfrak{X}^{q,1-q}(E^*)$ Multivektorfelder sowie $D_P = \mathcal{I}(P) \in \text{Der}^{p-1}(E)$ und entsprechend $D_Q = \mathcal{I}(Q)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 i_{[P,Q]} &= [\mathcal{L}_P, i_Q] = \mathcal{L}_P i_Q - (-1)^{(p-1)q} i_Q \mathcal{L}_P \\
 &= i_P d i_Q - (-1)^p d i_P i_Q - (-1)^{(p-1)q} i_Q i_P d + (-1)^{(p-1)q+p} i_Q d i_P
 \end{aligned}$$

Seien weiter $s_i \in \Gamma^\infty(E)$ Schnitte, die wir mit linearen Funktionen auf E^* identifizieren. Beachtet man noch, dass

$$(-1)^{(p-1)q+p} = -(-1)^{(p-1)(q-1)},$$

dann folgt (Summen über alle $(p, q-1)$ -Shuffles)

$$\begin{aligned}
 i_{[P,Q]} ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p+q} &= (i_P d i_Q - (-1)^{(p-1)(q-1)} i_Q d i_P) ds_1 \wedge \dots \wedge ds_{p+q} \\
 &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} i_P d(D_Q(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(q)})) \wedge ds_{\pi(q+1)} \wedge \dots \wedge ds_{\pi(p+q-1)} \\
 &\quad - (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} i_Q d(D_P(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(p)})) \wedge ds_{\pi(p+1)} \wedge \dots \wedge ds_{\pi(p+q-1)} \\
 &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} D_P(D_Q(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(q)}), s_{\pi(q+1)}, \dots, s_{\pi(p+q-1)}) \\
 &\quad - (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} D_Q(D_P(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(p)}), s_{\pi(p+1)}, \dots, s_{\pi(p+q-1)}) \\
 &= (D_P \circ D_Q - (-1)^{(p-1)(q-1)} D_Q \circ D_P)(s_1, \dots, s_{p+q-1}) \\
 &= (-1)^{(p-1)(q-1)} [D_P, D_Q]_{CM}(s_q, \dots, s_{p+q-1})
 \end{aligned}$$

\square

Satz 2.3.10. Sei $\pi \in \mathfrak{X}^{2,-1}(E^*)$ mit $[\pi, \pi] = 0$ und $m = \mathcal{I}_2(\pi) \in \text{Der}^1(E)$. Dann gilt $[m, m]_{CM} = 0$ und die Abbildung \mathcal{I}_\bullet hat die Eigenschaft

$$\delta_m \circ \mathcal{I}(P) = (-1)^{p-1} \mathcal{I} \circ \delta_\pi(P) \quad \text{für} \quad P \in \mathfrak{X}^{p,1-p}(E^*),$$

d.h. \mathcal{I}_\bullet induziert einen Isomorphismus der Kohomologie

$$H_{\pi, \text{lin}}^\bullet(E^*) \cong H_{m, CM}^{\bullet-1}(E).$$

Beweis. Zunächst ist $[m, m] = [\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(\pi)] = -\mathcal{I}([\pi, \pi]) = 0$, also ist durch $\delta_m = [m, \cdot]$ ein Differential definiert. Weiter ist für $P \in \mathfrak{X}^{p,1-p}(E^*)$

$$\delta_m \circ \mathcal{I}(P) = [\mathcal{I}(\pi), \mathcal{I}(P)] = (-1)^{p-1} \mathcal{I}([\pi, P]) = (-1)^{p-1} \mathcal{I} \circ \delta_\pi(P)$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

2.3.3 Triviale Deformationen

Definition 2.3.11. 1. Zwei formale Deformationen π_t und π'_t von $\pi_0 \in \mathfrak{X}^{2,-1}(E^*)$ heißen äquivalent, wenn es eine formale Reihe von Automorphismen der Form

$$\phi_t = \exp(\mathcal{L}_{X_t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{L}_{X_t})^k$$

mit einer formalen Reihe von Vektorfeldern

$$X_t = t X_1 + t^2 X_2 + \dots$$

gibt, so dass $\pi'_t = \phi_t(\pi_t)$. Dabei ist $(\mathcal{L}_{X_t})^k \pi = [X_t, [\dots [X_t, \pi] \dots]]$ gemeint.

2. Eine Deformation π_t von π_0 heißt trivial, wenn π_t äquivalent zu π_0 ist.

Da wir verlangen, dass ϕ_t lineare Poisson-Strukturen auf lineare Poisson-Strukturen abbildet, muss gelten

$$\exp(\mathcal{L}_{X_t}) \mathcal{L}_\xi \pi_t = -\exp(\mathcal{L}_{X_t}) \pi_t = -\pi'_t = \mathcal{L}_\xi \pi'_t = \mathcal{L}_\xi \exp(\mathcal{L}_{X_t}) \pi_t,$$

woraus folgt, dass $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_t] = \mathcal{L}_{[\xi, X_t]} = 0$, d.h. $X_t \in \mathfrak{X}^{1,0}(E^*)[[t]]$.

Bemerkung 2.3.12. Im Rahmen der allgemeinen Deformationstheorie einer Poisson-Mannigfaltigkeit M kann gezeigt werden, dass die Menge der formalen Diffeomorphismen $\exp(\mathcal{L}_{X_t})$ von M mit der Gruppe der homogenen Automorphismen der Gerstenhaber-Algebra $(\mathfrak{X}^\bullet(M)[[t]], [\cdot, \cdot], \wedge)$ vom Grad Null, welche in unterster Ordnung mit der Identität beginnen, übereinstimmt, siehe z.B. [50, Prop. 4.2.39]. Da $\mathfrak{X}^{\bullet,1-\bullet}(E^*)$ unter dem Dachprodukt nicht abgeschlossen ist, gilt diese Aussage hier nicht. Wegen der Abgeschlossenheit unter der Lieklammer bilden die formalen Diffeomorphismen $\exp(\mathcal{L}_{X_t})$ mit $X_i \in \mathfrak{X}^{1,0}(E^*)$ aufgrund der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel aber trotzdem eine Gruppe.

Sei $\pi_t = \pi_0 + t^n \pi_n + \dots$ eine formale Deformation von μ_0 und sei $\pi_n = \delta_{\pi_0}(X) = [\pi_0, X]$ mit $X \in \mathfrak{X}^{1,0}(E^*)$. Wir setzen $\phi_t = \exp(t^n \mathcal{L}_X)$ und bilden

$$\phi_t(\pi_t) = (\text{id} + t^n \mathcal{L}_X + \dots)(\pi_0 + t^n \pi_n + \dots) = \pi_0 + t^n(\pi_n + [X, \pi_0]) + t^{n+1}(\dots) = \pi_0 + t^{n+1}(\dots)$$

Es gilt also

Folgerung 2.3.13. Ist $H_{\pi_0, \text{lin}}^2(E^*) = 0$, so ist die Poisson-Mannigfaltigkeit (E^*, π_0) starr bezüglich der Deformation linearer Poisson-Strukturen.

Ist π_0 die kanonische symplektische Poisson-Struktur auf T^*M , dann gilt $\mathcal{L}_\xi \pi_0 = -\pi_0$ [50, Satz 3.2.6], also $\pi \in \mathfrak{X}^{2,-1}(T^*M)$. Ist weiter $m_0 = \mathcal{I}(\pi_0)$ die Lieklammer auf TM , so ergibt Bemerkung 2.2.2 zusammen mit Satz 2.3.10

$$H_{\pi_0, \text{lin}}^\bullet(T^*M) = H_{m_0, CM}^{\bullet-1}(TM) = \{0\},$$

womit gilt:

Folgerung 2.3.14. Das Lie-Algebroid TM ist starr.

Haben wir eine Deformation der linearen Poisson-Struktur π_0 gegeben, so erhalten wir mit dem Isomorphismus \mathcal{I} eine Deformation der Lie-Algebroid-Struktur $m_0 = \mathcal{I}(\pi_0)$. Sind weiter π_t und π'_t äquivalente Deformationen mit $\pi'_t = \exp(\mathcal{L}_{X_t})\pi_t$ für $X_t = tX_1 + t^2X_2 + \dots$, so erhalten wir durch Konjugation von $\exp(\mathcal{L}_{X_t})$ mit \mathcal{I} eine Äquivalenztransformation zwischen $m_t = \mathcal{I}(\pi_t)$ und $m'_t = \mathcal{I}(\pi'_t)$, genauer gilt

$$m'_t = \exp(\text{ad}_{D_t})m_t$$

wobei $D_t = \mathcal{I}(X_t)$ sowie $\text{ad}_{D_t} D' = [D_t, D']$ für $D' \in \text{Der}^k(E)$ gesetzt wurde. Man kann zeigen, dass dies auch äquivalent dazu ist, dass die Gleichung

$$T_t m_t(s_1, s_2) = m'_t(T_t s_1, T_t s_2) \quad \text{mit} \quad T_t = \exp(D_t)$$

gilt, siehe [50, Prop. 6.2.19].

2.4 Lie-Algebroid-Strukturen als Derivationen der Grassmannalgebra

Wir haben jetzt bereits zwei mögliche Betrachtungsweisen für Lie-Algebroiden kennengelernt, sowie die entsprechenden Deformationstheorien untersucht und auch formal gezeigt, dass diese äquivalent sind. In diesen Abschnitt werden wir noch eine dritte Sichtweise auf Lie-Algebroiden kennenlernen. Weiter werden wir die dadurch gegebene Deformationstheorie untersuchen sowie die Äquivalenz zu dem bisherigen zeigen.

Ist $(E, [\cdot, \cdot], \rho)$ ein Lie-Algebroid, dann ist auf $\Omega^\bullet(E) = \Gamma^\infty(\wedge^\bullet E^*)$ durch die Gleichung

$$d_E \alpha(s_1, \dots, s_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \rho(s_i) \alpha(s_1, \dots, \overset{i}{\wedge}, s_{k+1}) + \sum_{i < j} \alpha([s_i, s_j], s_1, \dots, \overset{i}{\wedge} \dots \overset{j}{\wedge}, s_{k+1})$$

eine Derivation

$$d_E : \Omega^k(E) \longrightarrow \Omega^{k+1}(E)$$

bezüglich des \wedge -Produktes definiert, und man rechnet nach, dass $d_E^2 = 0$ gilt. Ist umgekehrt für ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ eine solche Derivation von $\Omega^\bullet(E)$ gegeben, so lässt sich mit der obigen Formel eine Lie-Algebroid-Struktur auf E definieren, indem man für $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(E)$, $f \in C^\infty(M)$ die Gleichungen

$$\alpha([s_1, s_2]) = d_E(\alpha(s_2))(s_1) - d_E(\alpha(s_1))(s_2) - d_E \alpha(s_1, s_2),$$

$$\rho(s_1)(f) = d_E f(s_1)$$

fordert. Wir wollen die Deformation von Lie-Algebroiden nun als Deformation von Differentialen auf $\Omega^\bullet(E)$ auffassen. Das folgende ist bis auf eine leichte Verallgemeinerung auf Lie-Algebroiden aus [24, Abschnitt 8] übernommen.

Definition 2.4.1. Sei $F \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Dann bezeichnen wir die \wedge -Superderivationen von $\Omega^\bullet(F)$, die vom Grad k sind, mit

$$Der_k \Omega(F),$$

d.h. $D \in Der_k \Omega(F)$ ist eine Abbildung

$$D : \Omega^\bullet(F) \longrightarrow \Omega^{\bullet+k}(F)$$

und mit $\alpha \in \Omega^p(F)$, $\beta \in \Omega^q(F)$ gilt

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{pk} \alpha \wedge D\beta.$$

Weiter sei auf

$$Der_\bullet \Omega(F) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} Der_k \Omega(F)$$

für $D_1 \in Der_k \Omega(F)$, $D_2 \in Der_l \Omega(F)$ der Superkommutator durch

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - (-1)^{kl} D_2 \circ D_1$$

definiert.

Ist insbesondere $d_F \in Der_1 \Omega(F)$, so folgt

$$[d_F, d_F] = d_F d_F + d_F d_F = 2d_F^2,$$

d.h. d_F definiert genau dann eine Lie-Algebroid-Struktur auf F , wenn $[d_F, d_F] = 0$ gilt. In diesem Fall erhalten wir mit $\delta_{d_F} = [d_F, \cdot]$ einen Kokettenkomplex

$$Der_{-1} \Omega(F) \xrightarrow{\delta_{d_F}} Der_0 \Omega(F) \xrightarrow{\delta_{d_F}} Der_1 \Omega(F) \xrightarrow{\delta_{d_F}} \dots$$

und die zugehörigen Kohomologieklassen bezeichnen wir mit

$$H_{d_F}^k(\Omega(F)).$$

2.4.1 Algebraische Derivationen

Definition 2.4.2. Eine Derivation $D \in Der_k \Omega(F)$ heißt algebraisch, wenn $D|_{C^\infty(M)} = 0$.

Sei nun $D \in Der_k \Omega(F)$ eine algebraische Derivation. Dann gilt für $\omega \in \Omega(F)$ und $f \in C^\infty(M)$, dass $D(f\omega) = fD(\omega)$, d.h. D ist tensoriell und wir können für $x \in M$ die Einschränkung $D_x \in Der_k(\wedge^\bullet F_x)$ betrachten. Als Derivation ist D_x durch die Einschränkung auf 1-Formen,

$$D_x|_{F_x^*} : F_x^* \rightarrow \wedge^{k+1} F_x^*$$

eindeutig bestimmt. Bilden wir die duale Abbildung,

$$K_x \in \wedge^{k+1} F_x^* \otimes F_x,$$

so erhalten wir einen glatten Schnitt

$$K \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{k+1} F^* \otimes F^*) =: \Omega^{k+1}(F, F),$$

d.h. eine $k+1$ -Form auf F mit Werten in F . Wir bezeichnen D jetzt mit i_K und für Einsformen $\omega \in \Omega^k(F)$ gilt

$$D(\omega) = i_K \omega = \omega \circ K.$$

Wie üblich setzen wir

$$\Omega(F, F) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k(F, F).$$

Wir sehen auch, dass $Der_k \Omega(F) = 0$ für $k < -1$ sowie $Der_{-1} \Omega(F) = \{i_s \mid s \in \Gamma^\infty(F)\}$, denn eine Derivation D vom Grad < 0 ist notwendigerweise algebraisch und daher von der Form $D = i_s$ für $s \in \Gamma^\infty(F)$.

2.4.2 Die Lieableitung

Sei jetzt wieder E ein Lie-Algebroid und d_E das zugehörige Differential.

Definition 2.4.3. Für $K \in \Omega^k(E, E)$ ist die Lieableitung $\mathcal{L}_K : \Omega^l(E) \longrightarrow \Omega^{k+l}(E)$ durch

$$\mathcal{L}_K = [i_K, d] = (-1)^{k-1} \delta_{d_E}(i_K)$$

definiert. Man beachte, dass hiermit aufgrund $\mathfrak{X}(M) = \Omega^0(TM, TM)$ die gewöhnliche Lieableitung von Differentialformen verallgemeinert wird.

Es gilt damit also $[d_E, \mathcal{L}_K] = (-1)^{k-1} \delta_{d_E}^2(i_K) = 0$. Ist der Anker $\rho : E \rightarrow TM$ injektiv, so auch die Abbildung $\mathcal{L} : \Omega^\bullet(E, E) \longrightarrow Der_\bullet \Omega(E)$. Im Allgemeinen gilt mit $\mathcal{L}_K = 0$, also i_K geschlossen, dass $K \in \Omega(E, \ker \rho)$, d.h. K ist eine Form auf E mit Werten in $\ker \rho$. Denn ist \mathcal{L}_K eine algebraische Derivation (also z.B. $\mathcal{L}_K = 0$), dann folgt für alle $f \in C^\infty(M)$, dass

$$\mathcal{L}_K f = \rho(K)(f) = 0$$

und deshalb $\rho(K) = 0$. Nur wenn ρ injektiv ist, folgt daraus $K = 0$. Ist weiter i_K exakt, so ist i_K insbesondere geschlossen und wir haben ebenfalls $K \in \Omega(E, \ker \rho)$.

Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$i|_{\Omega(E, \ker \rho)} : \Omega(E, \ker \rho) \longrightarrow i(\Omega(E, \ker \rho)) \subset \{\text{algebraische Derivationen}\}.$$

Lemma 2.4.4. $i(\Omega(E, \ker \rho))$ ist abgeschlossen unter $\delta_{d_E} = [d_E, \cdot]$.

Beweis. Sei $K \in \Omega^k(E, \ker \rho)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann ist

$$\delta_{d_E}(i_K)f = (-1)^{k-1} [d, i_K]f = (-1)^{k-1} \rho(K)f = 0,$$

also $\delta_{d_E}(K)$ eine algebraische Derivation. Wir finden deshalb ein eindeutig bestimmtes $M \in \Omega(E, E)$, so dass $i_M = \delta_{d_E}(i_K)$. Wir haben aber bereits gesehen, dass jetzt sogar $M \in \Omega(E, \ker \rho)$ folgt. \square

Dieses Lemma liefert uns jetzt einen Unterkomplex von $Der_{\bullet}\Omega(E)$:

$$\dots \xrightarrow{\delta_{d_E}} i(\Omega^k(E, \ker \rho)) \xrightarrow{\delta_{d_E}} i(\Omega^{k+1}(E, \ker \rho)) \xrightarrow{\delta_{d_E}} \dots$$

Seien u und s_1, \dots, s_{k+1} Schnitte in E , wobei $u \in \ker \rho$ sei. Es gilt

$$\rho([u, s_1]_E) = [\rho(u), \rho(s_1)] = 0,$$

d.h. $\ker \rho$ ist ein Lie-Ideal. Insbesondere ist dann für $K \in \Omega^k(E, \ker \rho)$ auch der Ausdruck $[s_1, K(s_2, \dots, s_{k+1})]_E \in \ker \rho$ und wir können durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}K(s_1, \dots, s_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} [s_i, K(s_1, \overset{i}{\cdot} \dots, s_{k+1})] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} K([s_i, s_j], s_1, \overset{i}{\cdot} \dots \overset{j}{\cdot} \dots, s_{k+1}) \end{aligned}$$

eine Abbildung $\mathfrak{d} : \Omega^k(E, \ker \rho) \rightarrow \Omega^{k+1}(E, \ker \rho)$ definieren. Mit einer kleinen Rechnung erhält man, dass $\mathfrak{d}^2 = 0$ gilt.

Satz 2.4.5. *Die Abbildung*

$$i : (\Omega^{\bullet}(E, \ker \rho), \mathfrak{d}) \longrightarrow (i(\Omega^{\bullet}(E, \ker \rho)), \delta_{d_E})$$

ist ein Isomorphismus von Kokettenkomplexen.

Beweis. Da für $K \in \Omega(E, \ker \rho)$ die Abbildung i_K eine algebraische Derivation ist, genügt es für Einsformen $\alpha \in \Omega^1(E, \ker \rho)$ zu zeigen, dass

$$i_{\mathfrak{d}(K)}\alpha = \delta_{d_E} i_K \alpha = [d_E, i_K]\alpha,$$

was wir jetzt nachrechnen wollen. Zunächst gilt (man beachte $\rho \circ K = 0$)

$$\begin{aligned} i_K d_E \alpha(s_1, \dots, s_{k+1}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\sigma} d_E \alpha(K(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(k)}), s_{\sigma(k+1)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_{k+1}} (-1)^{\sigma} \left(\rho(K(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(k)})) \alpha(s_{\sigma(k+1)}) \right. \\ &\quad \left. - \rho(s_{\sigma(k)}) (\alpha(K(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(k)}))) \right. \\ &\quad \left. - \alpha([K(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(k)}), s_{\sigma(k+1)}]) \right) \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(s_i) \alpha(K(s_1, \overset{i}{\cdot} \dots, s_{k+1})) \\ &\quad + (-1)^k \alpha \left(\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} [s_i, K(s_1, \overset{i}{\cdot} \dots, s_{k+1})] \right). \end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
d_E i_K \alpha(s_1, \dots, s_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(s_i) i_K \alpha(s_1, \dots, \overset{i}{\wedge}, s_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} i_K \alpha([s_i, s_j], s_1, \dots, \overset{i}{\wedge} \dots \overset{j}{\wedge}, s_{k+i}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(s_i) \alpha(K(s_1, \dots, \overset{i}{\wedge}, s_{k+1})) \\
&\quad + \alpha \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j} K([s_i, s_j], s_1, \dots, \overset{i}{\wedge} \dots \overset{j}{\wedge}, s_{k+i}) \right),
\end{aligned}$$

womit wir mit $[d_E, i_K] = d_E i_K - (-1)^{k-1} i_K d_E$ die Behauptung erhalten. \square

Bezeichnen wir die Kohomologieklassen zu dem Komplex $\Omega^\bullet(E, \ker \rho)$ mit $H^\bullet(E, \ker \rho)$, so bedeutet der obige Satz, dass

$$H^\bullet(E, \ker \rho) \cong \frac{\{i_K | K \in \Omega(E, \ker \rho), i_K \text{ geschlossen}\}}{\{i_K | K \in \Omega(E, \ker \rho), i_K \text{ exakt}\}}.$$

2.4.3 Transitive Lie-Algebroiden

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz einige Eigenschaften von $Der_\bullet \Omega(E)$ für ein transitives Lie-Algebroid E , d.h. für Lie-Algebroiden E mit surjektivem Anker, angeben. Insbesondere gelten also die folgenden Aussagen für $E = TM$ mit der Lie-Klammer auf Vektorfeldern und $\rho = \text{id}$.

Satz 2.4.6. *Sei E ein Lie-Algebroid mit surjektivem Anker $\rho : E \rightarrow TM$ und sei $D \in Der_k \Omega(E)$. Dann existieren $K \in \Omega^k(E, E)$ und $L \in \Omega^{k+1}(E, E)$, so dass*

$$D = \mathcal{L}_K + i_L.$$

D ist algebraisch genau dann, wenn $K \in \Omega^k(E, \ker \rho)$.

Beweis. Seien $s_1, \dots, s_k \in \Gamma^\infty(E)$. Dann ist durch $f \mapsto D(f)(s_1, \dots, s_k)$ eine Derivation von $C^\infty(M)$ definiert. Wir finden deshalb ein Vektorfeld $X(s_1, \dots, s_k) \in \Gamma^\infty(TM)$ mit

$$D(f)(s_1, \dots, s_k) = X(s_1, \dots, s_k)(f).$$

Offensichtlich ist X alternierend und $C^\infty(M)$ -linear in den s_i . Ist nun $\rho : E \rightarrow TM$ surjektiv, so finden wir ein $K \in \Omega^k(E, E)$ mit²

$$X(s_1, \dots, s_k)(f) = \rho(K(s_1, \dots, s_k))(f) = d_E f \circ K(s_1, \dots, s_k) = \mathcal{L}_K f(s_1, \dots, s_k).$$

Damit folgt

$$(D - \mathcal{L}_K)|_{C^\infty(M)} = 0,$$

²Lokal ist das wegen der Linearität von ρ klar. Durch eine Partition der Eins erhalten wir die Aussage auch global, wobei wir wieder die Linearität von ρ verwenden.

d.h. wir finden ein $L \in \Omega^{k+1}(E, E)$ mit

$$D = \mathcal{L}_K + i_L.$$

Durch die Konstruktion ist klar, dass für D algebraisch notwendigerweise $K \in \Omega(E, \ker \rho)$ sein muss. Umgekehrt ist klar, dass $\mathcal{L}(\Omega(E, \ker \rho)) \subseteq \{\text{algebraische Derivationen}\}$. \square

Ist nun $D = \mathcal{L}_K + i_L \in \text{Der}_k \Omega(E)$ geschlossen, so ist auch i_L geschlossen und damit $L \in \Omega^{k+1}(E, \ker \rho)$. Ist außerdem $D = \mathcal{L}'_K + i'_L$ eine andere Darstellung, so folgt

$$i_L - i'_L = [d_E, i'_K - i_K],$$

so dass i_L und i'_L das gleiche Element in $H_{d_E}^{k+1}(\Omega(E))$ repräsentieren. Insgesamt erhalten wir damit [13, Corollary 4]:

Folgerung 2.4.7. Für Lie-Algebroiden mit surjektivem Anker gilt

$$H_{d_E}^\bullet(\Omega(E)) \cong \frac{\{i_K \mid K \in \Omega(E, \ker \rho), i_K \text{ geschlossen}\}}{\{i_K \mid K \in \Omega(E, \ker \rho E), i_K \text{ exakt}\}} \cong H^\bullet(E, \ker \rho).$$

Ist insbesondere $E = TM$ mit der Lieklammer für Vektorfelder und $\rho = \text{id}$ ergibt sich die

Folgerung 2.4.8. Sei $D \in \text{Der}_k \Omega(M)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $K \in \Omega^k(M, TM) = \Gamma^\infty(\wedge^k T^*M \otimes TM)$ und $L \in \Omega^{k+1}(M, TM)$, so dass $D = \mathcal{L}_K + i_L$. Es ist $L = 0$ genau dann, wenn D geschlossen ist, und es ist $K = 0$ genau dann, wenn D algebraisch ist. Weiter gilt für alle Kohomologieklassen

$$H_{d_E}^k(\Omega(M)) = 0.$$

2.4.4 Der Zusammenhang mit den Multiderivationen

Wir werden jetzt die Verbindung zu dem Komplex der Multiderivationen auf E herstellen, vergleiche auch [13, Abschnitt 2.5].

Satz 2.4.9. *Die Abbildungen*

$$R_k : \text{Der}_k \Omega(E) \longrightarrow \text{Der}^k(E),$$

die für $k \geq 0$, $D \in \text{Der}_k \Omega(E)$ und $s_1, \dots, s_{k+1} \in \Gamma^\infty(E)$ durch

$$\alpha(R_k(D)(s_1, \dots, s_{k+1})) = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i D(\alpha(s_i))(s_1, \dots, \overset{i}{\wedge} s_{k+1}) - D\alpha(s_1, \dots, s_{k+1})$$

sowie durch $R_{-1}(i_s) = s \in \text{Der}^{-1}(E)$ definiert sind, liefern einen Isomorphismus von gradierten Liealgebren.

Beweis. Wir geben zunächst die zu R inverse Abbildung $L : \text{Der}^k(E) \rightarrow \text{Der}_k \Omega(E)$ an. Zunächst gilt natürlich $L_s = i_s$. Für $D \in \text{Der}^k(E)$ mit $k \geq 0$ reicht es, L_D auf Funktionen und Einsformen festzulegen. Für Funktionen $f \in C^\infty(M)$ gilt

$$L_D f(s_1, \dots, s_k) = \sigma_D(s_1, \dots, s_k)$$

und für Einsformen $\alpha \in \Omega^1(E)$ braucht man nur die obige Formel umzustellen, und man erhält

$$L_D \alpha(s_1, \dots, s_{k+1}) = (-1)^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i \sigma_D(s_1, \dots, \overset{i}{\wedge} s_{k+1})(\alpha(s_i)) - \alpha(D(s_1, \dots, s_{k+1})).$$

Seien jetzt $D_1 \in \text{Der}^p(E)$, $D_2 \in \text{Der}^q(E)$ sowie $\omega \in \Omega^k(E)$. Wir definieren

$$\sigma_{D_1} \circ \omega(s_1, \dots, s_{p+k}) = \sum (-1)^\pi \sigma_{D_1}(s_{\pi(k+1)}, \dots, s_{\pi(k+p)})(\omega(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(k)}))$$

wobei die Summe über alle (k, p) -Shuffles zu bilden ist, sowie

$$\omega \circ D_1(s_1, \dots, s_{p+k}) = \sum (-1)^\pi \omega(D_1(s_{\pi(1)}, \dots, s_{\pi(p+1)}), s_{\pi(p+2)}, \dots, s_{\pi(p+1)})$$

mit der Summe über alle $(p+1, k-1)$ -Shuffles. Damit lässt sich nun nachrechnen, dass die Abbildung L durch

$$L_{D_1} \omega = (-1)^{pk} \sigma_{D_1} \circ \omega - \omega \circ D_1$$

gegeben ist.

Damit rechnen wir einerseits nach, dass

$$\begin{aligned} L_{[D_1, D_2]} \omega &= (-1)^{pq+pk+qk} (\sigma_{D_1} \circ D_2) \circ \omega - (-1)^{pk+qk} (\sigma_{D_2} \circ D_1) \circ \omega \\ &\quad + (-1)^{pk+qk} [\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}] \circ \omega - (-1)^{pq} \omega \circ (D_1 \circ D_2) + \omega \circ (D_2 \circ D_1), \end{aligned}$$

wobei $\sigma_{[D_1, D_2]} = (-1)^{pq} \sigma_{D_1} \circ D_2 - \sigma_{D_2} \circ D_1 + [\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}]$ verwendet wurde, sowie andererseits

$$\begin{aligned} [L_{D_1}, L_{D_2}] &= (-1)^{pk+qk} ((-1)^{qp} \sigma_{D_1} \circ (\sigma_{D_2} \circ \omega) - \sigma_{D_2} \circ (\sigma_{D_1} \circ \omega)) \\ &\quad + (-1)^{pq+pk} ((\sigma_{D_1} \circ \omega) \circ D_2 - \sigma_{D_1} \circ (\omega \circ D_2)) \\ &\quad - (-1)^{qk} ((\sigma_{D_2} \circ \omega) \circ D_1 - \sigma_{D_2} \circ (\omega \circ D_1)) \\ &\quad - ((-1)^{pq} (\omega \circ D_1) \circ D_2 - (\omega \circ D_2) \circ D_1). \end{aligned}$$

Durch Nachrechnen lassen sich nun die folgenden Gleichungen zeigen (vgl. auch [20, Theo. 2] für die dritte Aussage).

1. $[\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}] \circ \omega = (-1)^{pq} \sigma_{D_1} \circ (\sigma_{D_2} \circ \omega) - \sigma_{D_2} \circ (\sigma_{D_1} \circ \omega)$
2. $(\sigma_{D_1} \circ \omega) \circ D_2 - \sigma_{D_1} \circ (\omega \circ D_2) = (-1)^{qk} (\sigma_{D_1} \circ D_2) \circ \omega$
3. $(-1)^{pq} (\omega \circ D_1) \circ D_2 - (\omega \circ D_2) \circ D_1 = (-1)^{pq} \omega \circ (D_1 \circ D_2) - \omega \circ (D_2 \circ D_1)$

Damit folgt jetzt

$$[L_{D_1}, L_{D_2}] = L_{[D_1, D_2]},$$

d.h. L bzw. R sind Isomorphismen von gradierten Lie-Algebren. \square

Folgerung 2.4.10. Sei $d \in \text{Der}_1 \Omega(E)$ mit $[d, d] = 0$ und $m = R_1(d)$. Dann induziert R einen Isomorphismus

$$H_d^\bullet(\Omega(E)) \cong H_{m, CM}^\bullet(E)$$

der Kohomologien.

Beweis. Zunächst gilt $[R(d), R(d)] = R([d, d]) = 0$, so dass $\delta_{R(d)}$ tatsächlich ein Differential definiert. Weiter ist $\delta_m \circ R(D) = [R(d), R(D)] = R[d, D] = R \circ \delta_d(D)$, womit die Behauptung folgt. \square

Triviale Deformationen Eine Äquivalenz

$$m'_t = \exp(\text{ad}_{D_t})m_t$$

von Lie-Algebroid Strukturen mit $D_t = t D_1 + t^2 D_2 + \dots \in \text{Der}^0(E)[[t]]$ überträgt sich wieder zu einer Äquivalenz

$$d'_t = \exp(\text{ad}_{L_{D_t}})d_t$$

der zugehörigen Differentiale.

2.5 Triviale Deformationen im glatten Fall

Um die Definitionen, die wir für die Äquivalenz von Deformationen im formalen Rahmen gegeben haben, zu motivieren, werden wir in diesem Abschnitt glatte Deformationen von Lie-Algebroiden betrachten, da in diesem Falle der Äquivalenzbegriff offensichtlich ist. Zunächst aber einige vorbereitende Bemerkungen.

Sei $\Phi : E \rightarrow E$ ein Vektorbündelisomorphismus über $\phi : M \rightarrow M$. Wie üblich definieren wir die Anwendung von Φ auf einen Schnitt $s \in \Gamma^\infty(E)$ durch

$$\Phi^* s = \Phi^{-1} \circ s \circ \phi \in \Gamma^\infty(E).$$

Weiter sei die duale Abbildung $\check{\Phi} : E^* \rightarrow E^*$ mit Fußpunktabbildung ϕ^{-1} für $\alpha_m \in E_m^*$ durch

$$\check{\Phi}(\alpha_m) = \alpha_m \circ \Phi|_{E_{\phi^{-1}(m)}} \in E_{\phi^{-1}(m)}^*$$

definiert, und entsprechend die Anwendung auf Schnitte $\alpha \in \Gamma^\infty(E^*)$ durch

$$\check{\Phi}^* \alpha = (\check{\Phi})^{-1} \circ \alpha \circ \phi^{-1} \in \Gamma^\infty(E).$$

Es gilt also

$$\langle \check{\Phi}(\alpha_m), s_{\phi^{-1}(m)} \rangle = \langle \alpha_m, \Phi(s_{\phi^{-1}(m)}) \rangle = \langle \alpha_m, (\Phi^{-1})^* s|_m \rangle$$

sowie

$$\langle \check{\Phi}^* \alpha|_m, s_m \rangle = \langle \alpha_{\phi^{-1}(m)}, \Phi^{-1}(s_m) \rangle.$$

Sei $D_t \in \text{Der}^0(E)$ eine zeitabhängige Derivation mit Symbol $\sigma_t \in \mathfrak{X}(M)$, wobei D_t jetzt eine glatte Deformation von D_0 sein soll. Der Fluss³ $\Phi_{t,s}$ zu D ist definiert als ein Vektorbündelisomorphismus, bestimmt durch die Gleichungen [12, Appendix A]

1. $\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,u} = \Phi_{t,u}, \quad \Phi_{t,t} = \text{id}$
2. $\frac{d}{dt}|_{t=s} \Phi_{t,s}^* e = D_s(e)$ mit $e \in \Gamma^\infty(E)$

Für die Fußpunktabbildung $\phi_{t,s}$ zu $\Phi_{t,s}$ folgt dann

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=s} \phi_{t,s}(m) = \sigma_s(m),$$

d.h. $\phi_{t,s}$ ist der Fluss zu σ_s .

³Wir verwenden hier, wie in der Literatur üblich, die Bezeichnung Fluss auch für die Zeitentwicklungen zu zeitabhängigen Vektorfeldern.

Lemma 2.5.1. *Sei $D_t \in \text{Der}^0(E)$ eine zeitabhängige Derivation, $X_t = \mathcal{I}^{-1}(D_t) \in \mathfrak{X}^{1,0}(E^*)$ das zugehörige zeitabhängige lineare Vektorfeld auf E^* sowie $L_{D_t} \in \text{Der}_0\Omega(E)$ die durch D_t gegebene zeitabhängige Derivation von $\Omega(E)$. Sei weiter $\Phi_{t,s} : E \rightarrow E$ ein Vektorbündelisomorphismus über dem Diffeomorphismus $\phi_{s,t}$ mit $\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,u} = \Phi_{t,u}$ sowie $\Phi_{t,t} = \text{id}$. Dann sind folgende Behauptungen äquivalent*

1. $\Phi_{t,s}$ ist der Fluss zu D_s , d.h. für $e \in \Gamma^\infty(E)$ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Phi_{t,s}^* e = D_s(e).$$

2. $\check{\Phi}_{t,s}^{-1} : E^* \rightarrow E^*$ ist der Fluss zu dem Vektorfeld X_t , d.h. für $\alpha_m \in E^*$ gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \check{\Phi}_{t,s}^{-1}(\alpha_m) = X_s(\alpha_m).$$

3. Für die Abbildung $(\check{\Phi}_{t,s}^{-1})^* : \Omega(E) \rightarrow \Omega(E)$ gilt für $\alpha \in \Gamma^\infty(E^*)$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} (\check{\Phi}_{t,s}^{-1})^* \alpha = L_{D_s} \alpha.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma durch eine Rechnung in lokalen Koordinaten. Nehmen wir also an, dass $E = U \times \mathbb{R}^k$ mit U offen in \mathbb{R}^n . Sei $m = (x^1, \dots, x^n) = (x^i)$ sowie $v = (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^k) = (x^i, v^\mu) \in E_x$ und dazu dual $\alpha = (x^i, \alpha_\mu) \in E_x^*$. Ein Vektorbündelisomorphismus Φ ist dann gegeben durch

$$\Phi(x, v) = (\phi(x), \Psi(x)^\nu v^\mu)$$

mit einer linearen Abbildung $\Psi(x)$. Weiter schreiben wir Φ^{-1} als

$$\Phi^{-1}(x, v) = (\phi^{-1}(x), \tilde{\Psi}(x)^\nu v^\mu)$$

und es folgt $\tilde{\Psi}(\phi(x)) = (\Psi(x))^{-1}$. Sei nun $r = (r^\mu) \in \Gamma^\infty(E)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Phi_{t,s}^{-1}(r(\phi_{t,s}(x))) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \tilde{\Psi}_{t,s}(\phi_{t,s}(x))^\nu r^\mu(\phi_{s,t}(x)) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \tilde{\Psi}_{t,s}(\phi_{t,s}(x))^\nu \right) r^\mu(x) + \frac{\partial r^\mu}{\partial x^i}(x) \sigma_s^i(x) \\ &= - \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Psi_{t,s}(x)^\nu \right) r^\mu(x) + \frac{\partial r^\mu}{\partial x^i}(x) \sigma_s^i(x). \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir für $\alpha \in E_x^*$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \check{\Phi}_{t,s}^{-1}(\alpha) &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi_{t,s}(x), \alpha_\nu \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \tilde{\Psi}_{t,s}(\phi_{t,s}(x))^\nu \right) \\ &= \left(\sigma_s(x), \alpha_\nu \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \tilde{\Psi}_{t,s}(\phi_{t,s}(x))^\nu \right) \\ &=: X_s(\alpha). \end{aligned}$$

Für die Funktion $\hat{r} \in C^\infty(M)$ gilt $r(\alpha) = \alpha_\nu r^\nu(x)$ und damit $\frac{\partial \hat{r}}{\partial x^i} = \alpha_\nu \frac{\partial r^\nu}{\partial x^i}$ sowie $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \alpha_\nu} = r^\nu$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} i_{X_s(\alpha)} d\hat{r} &= \alpha_\nu \frac{\partial r^\nu}{\partial x^i} \sigma_s^i(x) + \alpha_\nu \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \tilde{\Psi}_{t,s}(\phi_{t,s}(x))^\nu_\mu \right) r^\mu(x) \\ &= \left\langle \alpha, \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \Phi_{t,s}^* r \right\rangle \Big|_x \end{aligned}$$

Damit folgt wegen $\mathcal{I}(X_s)(r) = \mathcal{I}_0(i_{X_s} d\hat{r})$ die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen. Für einen Schnitt $\alpha(x) = \alpha_\mu(x) \in \Gamma^\infty(E^*)$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \check{\Phi}_{t,s}(\alpha(\phi_{t,s}(X))) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \alpha_\nu(\phi_{t,s}(x)) \Psi_{t,s}(x)_\mu^\nu \\ &= \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial x^i}(x) \sigma_s^i(x) + \alpha_\nu(x) \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \Psi_{t,s}(x)_\mu^\nu. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\check{\Phi}_{t,s}^{-1})^* \alpha, r \right\rangle \Big|_x &= \sigma_s(x)(\alpha(r)) + \alpha_\nu(x) \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \Psi_{t,s}(x)_\mu^\nu - \sigma_s^i(x) \alpha_\mu(x) \frac{\partial r^\mu}{\partial x^i}(x) \\ &= \sigma_s(x)(\alpha(r)) - \alpha \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \Psi_{t,s}^* r \right). \end{aligned}$$

Erinnern wir uns nun an die Definition $\langle L_D, r \rangle = \sigma_D(\alpha(r)) - \alpha(D(r))$ für $D \in \text{Der}^0(E)$, so folgt auch die Äquivalenz der ersten und dritten Aussage. \square

Für glatte Deformationen haben wir den folgenden natürlichen Äquivalenzbegriff.

Definition 2.5.2. Zwei glatte Deformationen m_t und m'_t einer Lie-Algebroid-Struktur $m = m_0 \in \text{Der}^1(E)$ heißen äquivalent, wenn die dadurch gegebenen Lie-Algebroiden (E, m_t, ρ_t) und (E, m'_t, ρ'_t) für alle t isomorph sind, d.h wenn es einen zeitabhängigen Vektorbündelisomorphismus Φ_t gibt, so dass die Gleichungen

$$\Phi_t^*(m'_t(s_1, s_2)) = m_t(\Phi_t^* s_1, \Phi_t^* s_2)$$

sowie

$$\rho_t \circ \Phi = T\phi_t \circ \rho'_t$$

für alle t gelten, wobei $\phi_t : M \rightarrow M$ die Fußpunktabbildung zu Φ_t ist. Eine Deformation m_t von $m_0 \in \text{Der}^1(E)$ heißt trivial, wenn m_t äquivalent zu m_0 ist.

Seien jetzt also m_t und m'_t zwei äquivalente glatte Deformationen der Lie-Algebroid-Struktur m_0 mit der Äquivalenztransformation Φ_t . Mit einer kleinen Rechnung zeigt man, dass dies äquivalent dazu ist, dass für $\pi_t = \mathcal{I}^{-1}(m_t)$ und $\pi'_t = \mathcal{I}^{-1}(m'_t)$ die Gleichung

$$(\check{\Phi}_t^{-1})^* \pi'_t = \pi_t$$

gilt. Ebenso ist mit $d_t = L_{m_t}$ und $d'_t = L_{m'_t}$ dann auch die Aussage

$$(\check{\Phi}_t^{-1})^* \circ d'_t = d_t \circ (\check{\Phi}_t^{-1})^*$$

äquivalent zu den beiden oben genannten. Wir definieren die zeitabhängige Derivation $D_t \in \text{Der}^0(E)$ für $e \in \Gamma^\infty(E)$ durch

$$D_s(e) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \Phi_t^*(e)$$

und setzen $X_t = \mathcal{I}^{-1}(D_t)$. Seien weiter $m_t = m_0 + tm_1 + \dots$ und $m'_t = m_0 + tm'_1 + \dots$ die formalen Taylorentwicklungen. Ableiten nach t bei $t = 0$ liefert dann jeweils

$$1. \quad \Phi_t^*(m'_t(s_1, s_2)) = m_t(\Phi_t^*s_1, \Phi_t^*s_2)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \quad \rightsquigarrow \quad (m'_1 - m_1)(s_1, s_2) &= -D_0(m_0(s_1, s_2)) + m_0(D_0(s_1), s_2) \\ &\quad + m_0(s_1, D_0(s_2)) \\ &= [m_0, D_0](s_1, s_2) = \delta_{m_0}(D_0)(s_1, s_2) \end{aligned}$$

$$2. \quad (\check{\Phi}_t^{-1})^* \pi'_t = \pi_t$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \quad \rightsquigarrow \quad \pi'_1 - \pi_1 = [\pi_0, X_0] = \delta_{\pi_0}(X_0)$$

$$3. \quad (\check{\Phi}_t^{-1})^* \circ d'_t = d_t \circ (\check{\Phi}_t^{-1})^*$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \quad \rightsquigarrow \quad d'_1 - d_1 = d_0 L_{D_0} - L_{D_0} d_0 = [d_0, L_{D_0}] = \delta_{d_0}(L_{D_0})$$

In erster Ordnung haben wir damit auch die formale Äquivalenz in allen drei Betrachtungsweisen wiedergewonnen. Durch das Bilden von höheren Ableitungen sieht man, dass gilt:

Satz 2.5.3. *Die formale Äquivalenz der formalen Taylorreihen ist eine notwendige Bedingung für die glatte Äquivalenz.*

Allerdings ist auch dann, wenn die formalen Taylorreihen zweier glatter Deformationen m_t und m'_t formal äquivalent sind, keineswegs gesagt, dass m_t und m'_t auch im glatten Sinne äquivalent sind.

3 Deformation von Dirac-Strukturen

Im ersten Kapitel haben wir das Vektorbündel $E = TM \oplus T^*M$ mit der darauf kanonisch gegebenen symmetrischen Bilinearform betrachtet und auf den Schnitten $\Gamma^\infty(E)$ eine \mathbb{R} -bilineare Verknüpfung, die Courant-Klammer, eingeführt. Weiter betrachteten wir maximal isotrope Unterbündel L von E , so dass $\Gamma^\infty(L)$ unter der Courant-Klammer abgeschlossen war. Solche Unterbündel haben wir Dirac-Strukturen genannt. In diesem Kapitel soll nun eine Deformationstheorie für Dirac-Strukturen entwickelt werden. Zuvor wollen wir jedoch unsere Betrachtungen noch weiter verallgemeinern und von dem speziellen Vektorbündel $TM \oplus T^*M$ zu einem beliebigen Vektorbündel $E \rightarrow M$ mit einer nicht ausgearteten Bilinearform und einer \mathbb{R} -bilinearen Verknüpfung auf $\Gamma^\infty(E)$, für die wir die in Lemma 1.2.11 angegebenen Eigenschaften fordern, übergehen.

3.1 Courant-Algebroid

Definition 3.1.1. Ein Courant-Algebroid ist ein Vektorbündel E zusammen mit einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, einer bilinearen Verknüpfung $[\cdot, \cdot]_c : \Gamma^\infty(E) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$ und einem Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \rightarrow TM$, dem Anker, so dass für alle $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma^\infty(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ folgende Bedingungen gelten:

1. Jacobi-Identität in der Form

$$[e_1, [e_2, e_3]_c]_c = [e_1, e_2]_c, e_3]_c + [e_2, [e_1, e_3]_c]_c.$$

2. $[e_1, e_2]_c + [e_2, e_1]_c = \mathcal{D}\langle e_1, e_2 \rangle$, wobei $\mathcal{D} : C^\infty(M) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$ durch

$$\langle \mathcal{D}f, e \rangle = \rho(e)f$$

definiert ist.

3. $\rho(e_1)\langle e_2, e_3 \rangle = \langle [e_1, e_2]_c, e_3 \rangle + \langle e_2, [e_1, e_3]_c \rangle$

Lemma 3.1.2. Seien $e_i \in \Gamma^\infty(E)$ und $f \in C^\infty(M)$. Dann folgt mit den Eigenschaften 2 und 3 aus Definition 3.1.1 bereits die Leibniz-Regel

$$[e_1, fe_2]_c = f[e_1, e_2]_c + (\rho(e_1)f)e_2.$$

Weiter gilt wie im Falle von Lie-Algebroiden die Gleichung

$$\rho([e_1, e_2]_c) = [\rho(e_1), \rho(e_2)].$$

Für einen Beweis der ersten Aussage siehe [47, 29]. Die zweite Aussage zeigt man genauso wie bei Lie-Algebroiden, siehe dazu z.B. [30].

Bemerkung 3.1.3. Man rechnet leicht nach, dass im ersten Argument die Gleichung

$$[fe_1, e_2]_c = f[e_1, e_2]_c - (\rho(e_2)f)e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle \mathcal{D}f$$

gilt. Weiter kann man die dritte Bedingung von Definition 3.1.1 auch schreiben als

$$\langle [e_1, e_2]_c + [e_1, e_2]_c, e_3 \rangle = \rho(e_3) \langle e_1, e_2 \rangle.$$

Lemma 3.1.4 ([40, Lemma 2.6.2]). *In einem Courant-Algebroid gelten die folgenden Gleichungen:*

$$\begin{aligned} [e, \mathcal{D}f]_c &= \mathcal{D}\langle e, \mathcal{D}f \rangle \\ [\mathcal{D}f, e]_c &= 0 \\ \rho \circ \mathcal{D} &= 0, \quad d.h. \quad \langle \mathcal{D}f, \mathcal{D}g \rangle = 0 \quad \forall f, g \in C^\infty(M) \end{aligned}$$

Beweis. Seien $e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle [e_1, \mathcal{D}f]_c, e_2 \rangle &= -\langle \mathcal{D}f, [e_1, e_2]_c \rangle + \rho(e_1) \langle \mathcal{D}f, e_2 \rangle \\ &= -\rho([e_1, e_2]_c)f + \rho(e_1)\rho(e_2)f \\ &= \rho(e_2)\rho(e_1)f \\ &= \rho(e_2) \langle \mathcal{D}f, e_1 \rangle \\ &= \langle \mathcal{D}\langle \mathcal{D}f, e_1 \rangle, e_2 \rangle \end{aligned}$$

womit wir die erste Gleichung gezeigt haben. Damit folgt jetzt auch

$$[\mathcal{D}f, e_1]_c = -[e_1, \mathcal{D}f]_c + \mathcal{D}\langle \mathcal{D}f, e_1 \rangle = 0.$$

Für die letzte Aussage ist

$$\rho(\mathcal{D}f)g = 0 \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

zu zeigen. Wir können aber zumindest lokal jede Funktion $g \in C^\infty(M)$ als $\langle e_1, e_2 \rangle$ mit $e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E)$ schreiben. Damit folgt nun

$$\rho(\mathcal{D}f) \langle e_1, e_2 \rangle = \langle [\mathcal{D}f, e_1]_c, e_2 \rangle + \langle e_1, [\mathcal{D}f, e_2]_c \rangle = 0.$$

□

Bemerkung 3.1.5. Natürlich ist $TM \oplus T^*M$ nach Lemma 1.2.11 mit den entsprechenden Klammern ein Courant-Algebroid. Wir werden deshalb auch im Allgemeinen die Klammer $[\cdot, \cdot]_c$ Courant-Klammer nennen.

Definition 3.1.6. Sei E ein Courant-Algebroid mit gerader Faserdimension und maximal indefiniter Bilinearform¹. Eine verallgemeinerte Dirac-Struktur $L \subseteq E$ ist ein Untervektorbündel von E , das bezüglich der gegebenen Bilinearform maximal isotrop ist. Eine verallgemeinerte Dirac-Struktur heißt integrabel oder kurz Dirac-Struktur, wenn $\Gamma^\infty(L)$ unter der Courant-Klammer abgeschlossen ist,

$$[\Gamma^\infty(L), \Gamma^\infty(L)]_c \subseteq \Gamma^\infty(L).$$

¹Mit einer maximal indefiniten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf einem $2n$ -dimensionalen Vektorraum meinen wir eine Bilinearform der Signatur Null. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kann dann durch geeignete Wahl der Basen als Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit n -dimensionalen Blöcken dargestellt werden.

Für ein isotropes Unterbündel $L \subseteq E$ folgt mit der dritten Forderung in Definition 3.1.1 für $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(L)$, dass

$$[s_1, s_2]_C + [s_2, s_1]_C = \mathcal{D}\langle s_1, s_2 \rangle = 0.$$

Ist L sogar eine Dirac-Struktur, können wir wegen der Integrabilität die Courant-Klammer auf L einschränken. Diese eingeschränkte Klammer ist antisymmetrisch und es gelten nach wie vor die Jacobi-Identität und die Leibniz-Regel. Damit gilt:

Lemma 3.1.7. *Eine Dirac-Struktur L zusammen mit den Einschränkungen von Courant-Klammer und Anker auf L ist ein Lie-Algebroid.*

Im folgenden werden wir, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, nur Courant-Algebroiden mit gerader Faserdimension und maximal indefiniter Bilinearform betrachten.

3.2 Glatte Deformation von Dirac-Strukturen

Wir wollen jetzt Dirac-Strukturen L_t betrachten, die glatt von einem Parameter $t \in I$ abhängen, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall ist. Um dies zu präzisieren, sei zunächst $\pi : E \rightarrow M$ ein beliebiges Vektorbündel. Wir betrachten das mit der Projektion $pr : M \times I \rightarrow M$ zurückgeholte Bündel $pr^\#E$, wobei

$$pr^\#E = \{((m, t), v) \in (M \times \mathbb{R}) \times E \mid m = \pi(v)\},$$

und definieren eine glatte Familie von Unterbündeln $L_t \subseteq E$ als ein glattes Unterbündel $\mathfrak{L} \subset pr^\#E$, wobei $L_t = \mathfrak{L}|_{M \times \{t\}}$ gilt. Äquivalent können wir eine Familie L_t auch glatt nennen, wenn für eine beliebige Metrik der Orthogonalprojektor P_t auf L_t glatt von t abhängt, bzw. wenn der Projektor $P : pr^\#E \rightarrow pr^\#E$, definiert durch $P((m, t), v) = ((t, m), P_t(v))$ glatt ist. Im weiteren werden wir immer annehmen, dass das Intervall I die Null enthält.

Lemma 3.2.1. *Sei V ein Vektorraum, $\dim V = 2n$, mit einer nicht-ausgearteten, maximal indefiniten Bilinearform (\cdot, \cdot) sowie einem Skalarprodukt g . Seien weiter $L_1, L_2 \subseteq V$ maximal isotrope Unterräume, so dass*

$$i.) \quad V = L_1 \oplus L_2,$$

$$ii.) \quad L_1^\perp = L_2.$$

Sei weiter $P : V \rightarrow V$ der g -Orthogonalprojektor auf L_1 , also $\text{im } P = L_1$, $\text{im}(\text{id} - P) = L_2$. Bezeichnet nun P^T den bezüglich (\cdot, \cdot) adjungierten Projektor zu P , also $(Pv, w) = (v, P^T w)$ $\forall v, w \in V$, dann gilt

$$P^T = \text{id} - P,$$

d.h. P^T ist der g -Orthogonalprojektor auf L_2 .

Beweis. Sei $v \in L_1$, $w \in V$. Dann gilt

$$(P^T v, w) = (v, Pw) = 0$$

da $v, Pw \in L_1$ und es folgt $P^T v = 0$ für alle $v \in L_1$. Sei nun $v \in L_2$, $w \in V$ mit $w = (w_1, w_2) \in L_1 \oplus L_2$. Jetzt rechnet man

$$(P^T v, w) = (v, P(w_1 + w_2)) = (v, w_1) = (v, w_1) + (v, w_2) = (v, w),$$

womit $P^T v = v$ für alle $v \in L_2$ folgt. Damit ist gezeigt, dass P^T der g -Orthogonalprojektor auf L_2 ist. \square

Aus der symplektischen Geometrie ist bekannt, dass zu einem Lagrangeschen Unterbündel L immer ein Lagrangesches Komplementärbündel L' existiert. Um das zu zeigen, konstruiert man eine mit der symplektischen Form kompatible, fast komplexe Struktur J und definiert $L' = J(L)$. Auf gleiche Weise erhalten wir in unserem Fall ein entsprechendes Ergebnis.

Lemma 3.2.2. *Sei E ein Vektorbündel mit gerader Faserdimension und einer symmetrischen, nicht-ausgearteten, maximal indefiniten Bilinearform (\cdot, \cdot) . Dann gibt es eine Metrik² g und einen Vektorbündelisomorphismus $J : E \rightarrow E$ mit $J^2 = \text{id}$, so dass die Gleichung*

$$g(e_1, e_2) = (e_1, Je_2) \quad \forall e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E)$$

gilt und J eine Isometrie von (\cdot, \cdot) und damit auch von g ist.

Beweis. Wir wählen eine Metrik k auf E und definieren $A : E \rightarrow E$ durch $k(Ae_1, e_2) = (e_1, e_2)$. Dann gilt $A^* = A$, wobei $*$ die Adjunktion bezüglich der Metrik k bezeichnet. Man beachte, dass A nicht positiv definit ist, da ja auch (\cdot, \cdot) nicht positiv definit ist. Wir definieren jetzt (siehe „Polarzerlegung“, [37, Abschnitt 25.20])

$$B = |A| = \sqrt{AA^*} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(AA^*)\right),$$

und erhalten damit einen Vektorbündelisomorphismus B , wobei die Glattheit von B aus der Invertierbarkeit von A folgt. Dann ist B k -symmetrisch, $B^* = B$, und positiv definit, somit also $B \neq A$. Aus der Definition von B folgt, dass A mit B und folglich auch mit B^{-1} kommutiert. Wir setzen jetzt $J = B^{-1}A$. Dann kommutiert auch J mit A und B und wir rechnen

$$JJ^* = B^{-1}AA^*(B^{-1})^* = B^{-1}B^2(B^{-1})^* = \text{id},$$

also $J^* = J^{-1}$. Damit gilt weiter

$$J^{-1} = J^* = (B^{-1}A)^* = AB^{-1} = B^{-1}A = J$$

und so $J^2 = \text{id}$. Als nächstes rechnen wir

$$(Je_1, Je_2) = k(AJe_1, Je_2) = k(JAe_1, Je_2) = k(Ae_1, J^*Je_2) = k(Ae_1, e_2) = (e_1, e_2),$$

womit gezeigt wäre, dass J eine Isometrie bezüglich unserer indefiniten Bilinearform ist. Schließlich setzen wir $g(e_1, e_2) = (e_1, Je_2)$. Dann ist g symmetrisch und für alle $m \in M$, $v \in E|_m$ mit $v \neq 0$ gilt

$$g(v, v) = (v, Jv) = k(Av, Jv) = k(BJv, Jv) \geq 0,$$

da B positiv definit ist. □

Folgerung 3.2.3. Sei E wie oben und sei $L \subset E$ ein maximal isotropes Unterbündel von E . Wir wählen nach Lemma 3.2.2 einen Vektorbündelisomorphismus J und eine Metrik g mit $g(e_1, e_2) = (e_1, Je_2)$. Dann ist auch $J(L)$ maximal isotrop und es gilt

$$E = L \oplus J(L)$$

sowie

$$L^{\perp_g} = J(L).$$

²Mit Metrik ist eine positiv definite Bilinearform gemeint. Verlangen wir nur die Nichtausgeartetheit schreiben wir Pseudometrik.

Beweis. Sei $e_1 \in \Gamma^\infty(L)$ und $e_2 = J(e'_2)$ für ein $e'_2 \in \Gamma^\infty(L)$. Damit folgt

$$g(e_1, e_2) = g(e_1, J e'_2) = (e_1, J^2 e'_2) = (e_1, e'_2) = 0$$

und somit aus Dimensionsgründen $J(L) = L^{\perp g}$. Dass $J(L)$ isotrop ist, ist klar, da J eine Isometrie ist, und maximal isotrop folgt wieder aus Dimensionsgründen. \square

Bemerkung 3.2.4. Ist P der g -Orthogonalprojektor auf L , dann gilt nach Lemma 3.2.1, dass P^T der g -Orthogonalprojektor auf $J(L)$ ist.

Satz 3.2.5. *Sei E ein Vektorbündel, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $L_t \subset E$ mit $t \in I$ ein glatt von t -abhängiges Unterbündel. Dann gibt es einen glatt von t abhängigen Vektorbündelisomorphismus $U_t : E \rightarrow E$, so dass*

$$L_t = U_t(L_0).$$

Ist E ein Courant-Algebroid mit Bilinearform (\cdot, \cdot) und L_t eine verallgemeinerte Dirac-Struktur, dann kann zusätzlich erreicht werden, dass U_t eine Isometrie von (\cdot, \cdot) ist.

Beweis. Der Beweis verläuft im wesentlichen nach [18, Lemma 1.1.5]. Ist L_t eine verallgemeinerte Dirac-Struktur, dann finden wir nach Folgerung 3.2.3 einen Vektorbündelisomorphismus J und eine Metrik g , so dass E für alle $t \in I$ die g -orthogonale direkte Summe von L_t und $J(L_t)$ ist,

$$E = L_t \oplus J(L_t) \quad \text{und} \quad L_t^{\perp g} = J(L_t)$$

Falls L_t ein beliebiges Unterbündel in einem Vektorbündel E ist, so wählen wir eine nicht weiter bestimmte Metrik auf E . Sei $P_t : E \rightarrow E$ der g -Orthogonalprojektor auf L_t . Es gilt dann $P_t^* = P_t$, wobei $*$ die Adjunktion bezüglich der Metrik g bezeichnet. Ist L_t eine verallgemeinerte Dirac-Struktur, dann haben wir nach Bemerkung 3.2.4 weiter die Gleichung $P_t^T = \text{id} - P_t$.

Wir betrachten jetzt die Differentialgleichung

$$\dot{U}_t = [\dot{P}_t, P_t]U_t$$

mit der Anfangsbedingung $U_0 = \text{id}$. Lokal ist diese Gleichung von der Form

$$\frac{d}{dt}U(t, x) = A(t, x)U(t, x)$$

mit $x \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A : I \times V \rightarrow M_k(\mathbb{R})$, und hat eine eindeutig bestimmte, für alle $t \in I$ definierte glatte Lösung U_t , die außerdem auch glatt von x abhängt, siehe z.B. [31, Abschnitt IV.1]. Aufgrund der Eindeutigkeit fügen sich die lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung $U_t : E \rightarrow E$ der obigen Gleichung zusammen. Um zu sehen, dass U_t invertierbar ist, betrachten wir die Gleichung

$$\dot{V}_t = V_t[\dot{P}_t, P_t]$$

mit der Anfangsbedingung $V_0 = \text{id}$, die auch eine für alle $t \in I$ definierte, glatte Lösung hat. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U_t V_t) &= \dot{U}_t V_t + U_t \dot{V}_t \\ &= [\dot{P}_t, P_t]U_t V_t + U_t V_t[\dot{P}_t, P_t] \\ &= [[\dot{P}_t, P_t], U_t V_t] \end{aligned}$$

und $U_t V_t$ ist damit die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\frac{d}{dt} M_t = [[\dot{P}_t, P_t], M_t]$$

mit $M_0 = \text{id}$. Offensichtlich ist aber auch $M_t = \text{id}$ eine Lösung, so dass $U_t V_t = \text{id}$ folgt. Auf ähnliche Weise erhalten wir auch $V_t U_t = \text{id}$, insgesamt gilt damit $U_t^{-1} = V_t$. Da P_t ein g -Orthogonalprojektor ist, gilt $P_t^* = P_t$ und es folgt

$$(\dot{U}_t)^* = U_t^* [P_t^*, (\dot{P}_t)^*]$$

bzw.

$$(U_t^*)^\cdot = U_t^* [P_t, \dot{P}_t],$$

so dass $U_t^* = V_t = U_t^{-1}$. War L_t eine verallgemeinerte Dirac-Struktur, erhalten wir mit $P_t^T = \text{id} - P_t$ weiter

$$(U_t^T)^\cdot = U_t^T [\text{id} - P_t, -\dot{P}_t] = U_t^T [P_t, \dot{P}_t]$$

so dass auch $U_t^T = U_t^* = U_t^{-1}$ gilt. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass tatsächlich $P_t = U_t P_0 U_t^{-1}$ gilt. Da P_t ein Projektor ist, $P_t^2 = P_t$, folgen durch Ableiten die Gleichungen $\dot{P}_t = \dot{P}_t P_t + P_t \dot{P}_t$ sowie $P_t \dot{P}_t P_t = 0$. Damit rechnet man nach, dass P_t die Differentialgleichung

$$[\dot{U}_t U_t^{-1}, P_t] = \dot{P}_t$$

erfüllt. Man zeigt aber auch, dass $U_t P_0 U_t^{-1}$ die obige Gleichung zur selben Anfangsbedingung löst, so dass wegen der Eindeutigkeit der Lösung $P_t = U_t P_0 U_t^{-1}$ folgt. \square

Ist $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und $\Phi : E \rightarrow E$ ein Vektorbündelisomorphismus über einem Diffeomorphismus $\phi : M \rightarrow M$, dann definieren wir wie üblich für einen Schnitt $s : M \rightarrow E$ den Push-forward durch $\Phi_* s = \Phi \circ s \circ \phi^{-1}$ und den Pull-back durch $\Phi^* s = \Phi^{-1} \circ s \circ \phi$.

Lemma 3.2.6. *Sei E ein Courant-Algebroid mit Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, Courant-Klammer $[\cdot, \cdot]$ und Anker ρ . Weiter sei $\Phi_t : E \rightarrow E$ ein glatt von t abhängiger Vektorbündelisomorphismus. Wir definieren die t -abhängigen Klammern*

$$\langle e_1, e_2 \rangle_t = \langle \Phi_t^* e_1, \Phi_t^* e_2 \rangle$$

sowie

$$[e_1, e_2]_t = (\Phi_t^{-1})^* [\phi_t^* e_1, \phi_t^* e_2]$$

und einen t -abhängigen Anker

$$\rho_t = T\phi_t^{-1} \circ \rho \circ \Phi_t.$$

Dann ist für jedes t das Vektorbündel E zusammen mit den Klammern $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ und $[\cdot, \cdot]_t$ sowie dem Anker ρ_t ein Courant-Algebroid.

Ist $\Phi_0 = \text{id}$, so nennen wir $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_t, [\cdot, \cdot]_t, \rho_t)$ das durch Φ_t deformierte Courant-Algebroid. Mit Satz 3.2.5 erhalten wir sofort das folgenden Lemma.

Lemma 3.2.7. *Sei E ein Courant-Algebroid und sei L_t ein glatt von t abhängiges Untervektorbündel in E . Sei U_t die Isometrie aus Satz 3.2.5. Dann ist L_t genau dann für alle t eine Dirac-Struktur, wenn L_0 eine Dirac-Struktur für jedes durch U_t deformierte Courant-Algebroid $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_t, [\cdot, \cdot]_t, \rho_t)$ ist.*

3.2.1 Triviale Deformationen

Definition 3.2.8. Sei $E \rightarrow M$ ein Courant-Algebroid. Ein Courant-Algebroidautomorphismus ist ein Vektorbündelautomorphismus $\Phi : E \rightarrow E$ über einem Diffeomorphismus $\phi : M \rightarrow M$, so dass gilt:

i.) Φ ist eine Isometrie der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\langle \Phi^* e_1, \Phi^* e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

ii.) Φ ist natürlich bezüglich der Courant-Klammer,

$$[\Phi^* e_1, \Phi^* e_2]_C = \Phi^* [e_1, e_2]_C.$$

Lemma 3.2.9. Sei $\Phi : E \rightarrow E$ ein Courant-Algebroidautomorphismus. Dann gilt für den Anker ρ die Gleichung

$$\rho \circ \Phi = T\phi \circ \rho.$$

Beweis. Wir rechnen einerseits nach, dass

$$[\Phi^* e_1, \Phi^* (f e_2)]_C = [\Phi^* e_1, \phi^* f \Phi^* e_2]_C = \Phi^* (f [e_1, e_2]_C) + \rho(\Phi^* e_1) (\phi^* f) \Phi^* e_2$$

gilt. Andererseits haben wir auch die Gleichung

$$[\Phi^* e_1, \Phi^* (f e_2)]_C = \Phi^* [e_1, f e_2]_C = \Phi^* (f [e_1, e_2]_C) + \phi^* (\rho(e_1) f) \Phi^* e_2,$$

womit wir jetzt

$$\begin{aligned} \phi^* (\rho(e_1)) (\phi^* f) &= \phi^* (\rho(e_1) f) \\ &= \rho(\Phi^* e_1) (\phi^* f) \end{aligned}$$

erhalten, d.h.

$$T\phi^{-1} \circ \rho(e_1) \circ \phi = \rho(\Phi^{-1} \circ e_1 \circ \phi),$$

was zu zeigen war. □

Satz 3.2.10. Für $E = TM \oplus T^*M$ mit der kanonischen Courant-Algebroidstruktur ist jeder Automorphismus Φ von der Form

$$\Phi = \tau_B \circ (T\phi, T_*\phi),$$

wobei τ_B eine Eichtransformation zu einer geschlossenen Zweiform $B \in \Omega^2(M)$ und $\phi : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus von M ist. B und ϕ sind dabei eindeutig bestimmt. Die Automorphismengruppe von $TM \oplus T^*M$ ist damit isomorph zu dem semidirekten Produkt $\mathcal{Z}^2(M) \ltimes \text{Diff}(M)$ mit $\mathcal{Z}^2(M) = \ker(d|_{\Omega^2(M)})$, wobei die Verknüpfung durch

$$(B, \phi)(C, \psi) = (B + (\phi^{-1})^* C, \phi \circ \psi)$$

gegeben ist.

Beweis. Sei zunächst $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) : TM \oplus T^*M \rightarrow TM \oplus T^*M$ ein Automorphismus über der Identität. Mit Lemma 3.2.9 folgt dann $\Phi_1(X, \alpha) = \rho(\Phi(X, \alpha)) = \rho(X, \alpha) = X$. Da Φ eine Isometrie der kanonischen symmetrischen Bilinearform auf $TM \oplus T^*M$ ist, muss folgende Gleichung gelten:

$$\langle X, \Phi_2(Y, \beta) \rangle + \langle Y, \Phi_2(X, \alpha) \rangle = \langle X, \beta \rangle + \langle Y, \alpha \rangle.$$

Schreiben wir Φ als Blockmatrix bezüglich der direkten Summe $TM \oplus T^*M$,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix},$$

dann folgt, indem wir $X = 0$ setzen, die Bedingung $\Phi_{22}(\alpha) = \alpha$, und weiter, wenn wir $\alpha = \beta = 0$ setzen, die Gleichung

$$\langle X, \Phi_2(Y, 0) \rangle + \langle Y, \Phi_2(X, 0) \rangle = 0,$$

d.h.

$$\Phi_{21} + \Phi_{21}^* = 0$$

Also gilt $\Phi_{21} = B \in \Omega^2(M)$ und damit $\Phi = \tau_B$. Mit Lemma 1.2.9 folgt weiter $dB = 0$, da τ_B ein Automorphismus der Courant-Klammer sein muss. Insgesamt haben wir jetzt

$$\Phi = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ B & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Ist nun Φ ein Automorphismus über einem Diffeomorphismus $\phi : M \rightarrow M$, dann ist die Verknüpfung $(T\phi^{-1}, T^*\phi) \circ \Phi$ wie eben gezeigt eine Eichtransformation τ_B zu einer geschlossenen Zweiform B . Die Eindeutigkeit von B und ϕ ist klar, und die Behauptung über die Verknüpfung in dem semidirekten Produkt $\mathcal{Z}^2(M) \rtimes \mathcal{D}iff(M)$ folgt leicht aus Lemma 1.2.10. \square

Triviale Deformationen Um zu klären, was wir als triviale glatte Deformationen bezeichnen wollen, lassen wir uns von den beiden Spezialfällen für Dirac-Strukturen, nämlich symplektische Mannigfaltigkeiten und Poisson-Mannigfaltigkeiten, leiten. Eine Deformation ω_t einer symplektischen Form ω_0 auf M heißt trivial, wenn es eine glatte Familie von Diffeomorphismen $\phi_t : M \rightarrow M$ gibt, so dass $\omega_t = \phi_t^* \omega_0$. Entsprechendes gilt für triviale Deformationen π_t von Poisson-Strukturen. Wir wissen aber, dass die Gleichungen

$$\text{graph}(\phi_t^* \omega_0) = \mathcal{F}\phi_t(\text{graph}(\omega_0))$$

bzw.

$$\text{graph}(\phi_t^* \pi_0) = \mathcal{F}\phi_t(\text{graph}(\pi_0))$$

gelten. Deshalb manchen wir für Dirac-Strukturen in $TM \oplus T^*M$ folgende

Definition 3.2.11. Zwei glatte Deformationen L_t und L'_t von $L_0 \in TM \oplus T^*M$ heißen äquivalent, wenn es glatt von t abhängige Diffeomorphismen $\phi_t : M \rightarrow M$ gibt, so dass

$$L'_t = \mathcal{F}\phi_t(L_t).$$

Eine glatte Deformation L_t von $L_0 \in TM \oplus T^*M$ heißt trivial, wenn L_t äquivalent zu L_0 ist,

$$L_t = \mathcal{F}\phi_t(L_0).$$

Man beachte, dass dies nach Lemma 3.2.10 nicht damit übereinstimmt, zu verlangen, dass es einen Courant-Algebroidautomorphismus Φ_t gibt, so dass $L_t = \Phi_t(L_0)$. In diesem Fall wären ja zusätzlich noch die Eichtransformationen zu geschlossenen Zweiformen dabei, was beispielsweise dazu führen würde, dass je zwei Deformationen der Form $L_t = \text{graph}(\omega_t)$ und $L'_t = \text{graph}(\omega'_t)$ äquivalent wären, wobei die Äquivalenztransformation durch $\tau_{\omega_t - \omega'_t}$ gegeben ist.

Bemerkung 3.2.12. Im Fall eines allgemeinen Courant-Algebroids $E \rightarrow M$ haben wir keinen kanonischen Lift mehr von Diffeomorphismen von M zu Automorphismen von E . Damit sind zwar weiterhin die Automorphismen über der Identität ausgezeichnet, eine Darstellung der Automorphismengruppe als semidirektes Produkt wie in Lemma 3.2.10 existiert jedoch für ein beliebiges Courant-Algebroid nicht. Im allgemeinen Fall käme für die Menge der Äquivalenztransformationen deshalb nur die ganze Automorphismengruppe in Frage. Wie wir aber gerade gesehen haben, ist diese im Falle $E = TM \oplus T^*M$ zu groß, sofern wir für symplektische und Poisson-Mannigfaltigkeiten bekannte Ergebnisse reproduzieren wollen. Bei der Definition von äquivalenten und trivialen Deformationen beschränken wir uns deshalb auf den Fall $E = TM \oplus T^*M$.

Bemerkung 3.2.13. Haben wir eine glatte Deformation L_t einer Dirac-Struktur $L = L_0$ gegeben, so liefert dies nach Lemma 3.2.7 insbesondere eine Deformation des Lie-Algebroids L_0 . Es gibt jedoch keinen direkten Zusammenhang zwischen den Deformationen von L als Dirac-Struktur und den Lie-Algebroiddeformationen von L . Beispielsweise ist durch eine geschlossene Zweiform ω mit $L_t = \text{graph}(t\omega)$ eine glatte Dirac-Deformation von $L_0 = TM$ gegeben, die aber, außer für $\omega = 0$, keine triviale Deformation sein kann, da ja TM unter den Abbildungen $\mathcal{F}\phi$ für einen Diffeomorphismus ϕ von M erhalten bleibt. Andererseits wissen wir aber aus Folgerung 2.3.14, dass es nur triviale Deformationen von TM als Lie-Algebroid gibt.

3.3 Formale Deformation von Dirac-Strukturen

Bevor wir mit der Formulierung einer formalen Deformationstheorie beginnen können, müssen wir zunächst eine dafür geeignete Beschreibung unseres Problems finden. Dies ist notwendig, da wir formale Reihen von den zu deformierenden Objekten bilden können müssen, was aber für Dirac-Strukturen als Unterbündel in einem Courant-Algebroid auf direktem Weg nicht möglich ist. Viele Aussagen in den folgenden Abschnitten sind jedoch unabhängig davon, ob wir formale oder glatte Deformationen betrachten. Außerdem werden wir teilweise auch weiterhin glatte Deformationen betrachten, um Definitionen für den formalen Fall zu motivieren.

3.3.1 Deformierte Dirac-Strukturen als Graphen

Sei L_t eine glatt von t abhängige Dirac-Struktur in einem Courant-Algebroid $E \rightarrow M$. Wir finden dann eine Metrik g , so dass das g -orthogonale Komplement L^\perp von L maximal isotrop ist. Mit Hilfe der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ können wir L^\perp mit L^* identifizieren und erhalten dadurch einen Isomorphismus³ $E \cong L \oplus L^*$. Ist M kompakt, so kann L_t für kleine t als Graph einer Abbildung $\omega_t : L \rightarrow L^*$ beschrieben werden, im Allgemeinen ist dies zumindest lokal möglich. Die Isotropie von L_t bedeutet gerade $\omega_t \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$, wobei wir wieder die Zweiform ω_t auf L durch $\omega(s_1)(s_2) = \omega(s_1, s_2)$ für $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(L)$ mit einem Element $\Gamma^\infty(\text{Hom}(L, L^*))$ identifizieren.

³Der Isomorphismus ist natürlich von der Wahl des Komplements L^\perp abhängig

Weiter ist $\text{graph}(\omega)$ genau dann integrabel, wenn für alle $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma^\infty(L)$ gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle [s_1 + \omega(s_1), s_2 + \omega(s_2)]_C, s_3 + \omega(s_3) \rangle \\
&= \langle [s_1, s_2]_C, s_3 \rangle \\
&\quad + \langle [s_1, \omega(s_2)]_C, s_3 \rangle + \langle [\omega(s_1), s_2]_C, s_3 \rangle + \langle [s_1, s_2]_C, \omega(s_3) \rangle \\
&\quad + \langle [s_1, \omega(s_2)]_C, \omega(s_3) \rangle + \langle [\omega(s_1), s_2]_C, \omega(s_3) \rangle + \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_C, s_3 \rangle \\
&\quad + \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_C, \omega(s_3) \rangle.
\end{aligned}$$

Wir werden die einzelnen Ordnungen in ω getrennt untersuchen. Zunächst ist der erste Term $\langle [s_1, s_2]_C, s_3 \rangle = 0$, da ja L integrabel ist. Die in ω linearen Terme sind durch das folgende Lemma erfasst.

Lemma 3.3.1. *Bezeichnet d_L das Lie-Algebroiddifferential von L , dann gilt*

$$d_L \omega(s_1, s_2, s_3) = \langle [s_1, \omega(s_2)]_C, s_3 \rangle + \langle [\omega(s_1), s_2]_C, s_3 \rangle + \langle [s_1, s_2]_C, \omega(s_3) \rangle.$$

Beweis. Mit Hilfe der in einem Courant-Algebroid gültigen Identitäten rechnen wir:

$$\begin{aligned}
d_L \omega(s_1, s_2, s_3) &= \rho(s_1)\omega(s_2, s_3) + \rho(s_2)\omega(s_3, s_1) + \rho(s_3)\omega(s_1, s_2) \\
&\quad - \omega([s_1, s_2]_C, s_3) + \omega([s_1, s_3]_C, s_2) - \omega([s_2, s_3]_C, s_1) \\
&= \rho(s_1)\langle \omega(s_2), s_3 \rangle - \rho(s_2)\langle \omega(s_1), s_3 \rangle + \rho(s_3)\langle \omega(s_1), s_2 \rangle \\
&\quad - \omega([s_1, s_2]_C, g) + \omega([s_1, g]_C, s_2) - \omega([s_2, s_3]_C, e) \\
&= \langle [s_1, \omega(s_2)]_C, s_3 \rangle + \langle \omega(s_2), [s_1, s_3]_C \rangle + \langle [\omega(s_1), s_2]_C, s_3 \rangle \\
&\quad - \langle \omega(s_1), [s_2, s_3]_C \rangle \\
&\quad - \omega([s_1, s_2]_C, s_3) + \omega([s_1, s_3]_C, s_2) - \omega([s_2, s_3]_C, s_1) \\
&= \langle [s_1, \omega(s_2)]_C, s_3 \rangle + \langle [\omega(s_1), s_2]_C, s_3 \rangle + \langle [s_1, s_2]_C, \omega(s_3) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Um die in ω quadratischen Terme systematisch untersuchen zu können, müssen wir etwas mehr arbeiten. In dem folgenden Abschnitt werden wir eine Klammer auf L^* definieren, mit deren Hilfe sich die Gleichung, die eine Deformation ω_t erfüllen muss, auf einfache Weise schreiben lässt.

3.3.2 Eine verallgemeinerte Schouten-Nijenhuis-Klammer

Falls auch L^* eine Dirac-Struktur und damit ein Lie-Algebroid ist, verschwindet der in ω kubische Term. In diesem Fall ist $\text{graph}(\omega)$ genau dann eine Dirac-Struktur, wenn die Gleichung

$$d_L \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_* = 0$$

erfüllt ist [33], wobei $[\cdot, \cdot]_*$ die Schouten-Nijenhuis-Klammer auf L^* bezeichnet, siehe Definition A.8.

Es stellt sich die Frage, ob man zu jeder Dirac-Struktur L eine komplementäre Dirac-Struktur L' finden kann. Im Allgemeinen ist dies nicht möglich, wie folgendes Beispiel, welches uns von

Henrique Bursztyn mitgeteilt wurde, zeigt. Sei $E = TM \oplus T^*M$ und ϕ eine geschlossene 3-Form auf M . Wir betrachten die „ ϕ -twisted“ Courant-Klammer

$$[(X, \alpha), (Y, \beta)]_\phi = [(X, \alpha), (Y, \beta)] + \phi(X, Y, \cdot),$$

wobei die Klammer auf der rechten Seite die Standard-Courant-Klammer ist. E zusammen mit $[\cdot, \cdot]_\phi$, der Standard-Bilinearform und der Projektion auf TM als Anker ist dann ebenfalls ein Courant-Algebroid, siehe [43]. In E ist $L = T^*M$ eine Dirac-Struktur, TM ist jedoch unter $[\cdot, \cdot]_\phi$ nicht mehr abgeschlossen. Jedes isotrope Unterbündel L' komplementär zu T^*M ist Graph einer Zweiform $\omega \in \Omega^2(M)$. Damit L' eine Dirac-Struktur ist, muss die Bedingung $d\omega = \phi$ erfüllt sein, siehe ebenfalls [43]. Ist ϕ nicht exakt, finden wir somit keine zu T^*M transversale Dirac-Struktur.

Im Allgemeinen können wir also nicht davon ausgehen, dass L^* ein Lie-Algebroid ist und die Courant-Klammer auf $L \oplus L^*$ kann nicht einfach auf L^* eingeschränkt werden. Wir können jedoch durch

$$[\alpha, \beta]_* = \text{pr}_{L^*}([\alpha, \beta]_c)$$

eine Verknüpfung $[\cdot, \cdot]_* : \Gamma^\infty(L^*) \times \Gamma^\infty(L^*) \rightarrow \Gamma^\infty(L^*)$ definieren, wobei $\text{pr}_{L^*} : L \oplus L^* \rightarrow L^*$ die Projektion auf L^* bezeichnet.

Lemma 3.3.2. *Die Klammer $[\cdot, \cdot]_*$ ist antisymmetrisch und erfüllt eine Leibniz-Regel:*

$$[\alpha, f\beta]_* = f[\alpha, \beta]_* + \rho(\alpha)f\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma^\infty(L^*), f \in C^\infty(M).$$

Beweis. Mit der Isotropie von L^* folgt

$$0 = \rho(e)\langle \alpha, \beta \rangle = \langle e, [\alpha, \beta]_c + [\beta, \alpha]_c \rangle$$

und damit die Antisymmetrie von $[\cdot, \cdot]_*$. Die Leibniz-Regel folgt direkt aus der Leibniz-Regel für die Courant-Klammer. \square

Bemerkung 3.3.3. Im Allgemeinen wird die Jacobi-Identität für die Klammer $[\cdot, \cdot]_*$ nicht gelten. Wir werden später sehen (Lemma 3.4.1), dass die Jacobi-Identität für $[\cdot, \cdot]_*$ genau dann gilt, wenn L^* eine Dirac-Struktur ist.

Wie bei den Lie-Algebroiden (vgl. A.8) erweitern wir jetzt diese Klammer auf alle Formen $\omega \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L^*)$, indem wir

$$[f, g]_* = 0 \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

$$[\alpha, f]_* = \rho(\alpha)f = -[f, \alpha]_* \quad \forall \alpha \in \Gamma^\infty(L^*), f \in C^\infty(M)$$

und für $\omega \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k L^*)$, $\mu \in \Gamma^\infty(\bigwedge^l L^*)$ sowie $\eta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L^*)$ die Leibniz-Regel

$$[\omega, \mu \wedge \eta]_* = [\omega, \mu]_* \wedge \eta + (-1)^{(k-1)l} \mu \wedge [\omega, \eta]_*$$

fordern. Lokal ergeben sich für Formen $\omega = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k$, $\mu = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_l$ und $f \in C^\infty$ die Gleichungen

$$[f, \omega]_* = \sum_{i=1}^k (-1)^i \rho(\alpha_i) f \alpha_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{\alpha_k}$$

und

$$[\omega, \mu]_* = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (-1)^{i+j} [\alpha_i, \beta_j]_* \wedge \alpha_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{\alpha_k} \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \overset{j}{\beta_l}.$$

Wie im Falle der Schouten-Nijenhuis-Klammer bei Lie-Algebroiden überlegt man sich, dass

$$[\cdot, \cdot]_* : \Gamma^\infty(\bigwedge^k L^*) \times \Gamma^\infty(\bigwedge^l L^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\bigwedge^{k+l-1} L^*)$$

dadurch wohldefiniert ist. Die Bedeutung dieser Klammer für uns ergibt sich aus dem dritten Teil des folgenden Lemmas.

Lemma 3.3.4. *Sei $\alpha \in \Gamma^\infty(L^*)$, $\omega, \mu \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 L^*)$ und $f \in C^\infty(M)$ sowie $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma^\infty(L)$. Dann gilt*

$$i.) \quad [\omega, f]_*(s_1) = [\omega(s_1), f]_*$$

$$ii.) \quad [\omega, \alpha]_*(s_1, s_2) = \langle [\omega(s_1), \alpha]_*, s_2 \rangle - \langle [\omega(s_2), \alpha]_*, s_1 \rangle + \rho(\alpha)\omega(s_1, s_2)$$

$$\begin{aligned} iii.) \quad [\omega, \mu]_*(s_1, s_2, s_3) &= \langle [\omega(s_1), s_2]_c, \mu(s_3) \rangle + \langle [s_1, \omega(s_2)]_c, \mu(s_3) \rangle \\ &\quad + \langle [\omega(s_1), \mu(s_2)]_c, s_3 \rangle + \langle [\mu(s_1), s_2]_c, \omega(s_3) \rangle \\ &\quad + \langle [s_1, \mu(s_2)]_c, \omega(s_3) \rangle + \langle [\mu(s_1), \omega(s_2)]_c, s_3 \rangle \end{aligned}$$

Beweis. *i.)* Zunächst überlegt man sich, dass sowohl der Ausdruck links des Gleichheitszeichens als auch der auf der rechten Seite funktionslinear in ω ist. Deshalb genügt es, die Behauptung für $\omega = \mu \wedge \eta$ zu zeigen:

$$[\mu \wedge \eta, f]_*(s) = -(\rho(\mu)f)\eta(s) + (\rho(\eta)f)\mu(s) = [\mu(s)\eta - \eta(s)\mu, f]_* = [(\mu \wedge \eta)(s), f]_*.$$

ii.) Nach Konstruktion gilt für die linke Seite folgende Leibniz-Regel:

$$[f\omega, \alpha]_* = f[\omega, \alpha]_* + (\rho(\alpha)f)\omega.$$

Mit einer kleinen Rechnung überzeugt man sich davon, dass die selbe Leibniz-Regel auch für die rechte Seite gilt, so dass es wieder genügt, die Behauptung für $\omega = \mu \wedge \eta$ zu zeigen. Dann ergibt sich für die linke Seite

$$\begin{aligned} [\mu \wedge \eta, \alpha]_*(s_1, s_2) &= ([\mu, \alpha]_* \wedge \eta - [\eta, \alpha]_* \wedge \mu)(s_1, s_2) \\ &= \langle [\mu, \alpha]_c, s_1 \rangle \eta(s_2) - \langle [\mu, \alpha]_c, s_2 \rangle \eta(s_1) - \langle [\eta, \alpha]_c, s_1 \rangle \mu(s_2) + \langle [\eta, \alpha]_c, s_2 \rangle \mu(s_1). \end{aligned}$$

Jetzt zur rechten Seite:

$$\begin{aligned} \langle [(\mu \wedge \eta)(s_1), \alpha]_*, s_2 \rangle &= \langle [\mu(s_1)\eta - \eta(s_1)\mu, \alpha]_c, s_2 \rangle \\ &= \langle \mu(s_1)[\eta, \alpha]_c - (\rho(\alpha)\mu(s_1))\eta, s_2 \rangle - \langle \eta(s_1)[\mu, \alpha]_c + (\rho(\alpha)\eta(s_1))\mu, s_2 \rangle \\ &= \langle [\eta, \alpha]_c, s_2 \rangle \mu(s_1) - \langle [\mu, \alpha]_c, s_2 \rangle \eta(s_1) + (\rho(\alpha)\eta(s_1))\mu(s_2) - (\rho(\alpha)\mu(s_1))\eta(s_2), \\ \langle [(\mu \wedge \eta)(s_2), \alpha]_*, s_1 \rangle &= \langle [\eta, \alpha]_c, s_1 \rangle \mu(s_2) - \langle [\mu, \alpha]_c, s_1 \rangle \eta(s_2) - (\rho(\alpha)\eta(s_2))\mu(s_1) - (\rho(\alpha)\mu(s_2))\eta(s_1). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} [\mu \wedge \eta, \alpha]_*(s_1, s_2) &- \langle [(\mu \wedge \eta)(s_1), \alpha]_*, s_2 \rangle + \langle [(\mu \wedge \eta)(s_2), \alpha]_*, s_1 \rangle \\ &= -(\rho(\alpha)\eta(s_1))\mu(s_2) + (\rho(\alpha)\mu(s_1))\eta(s_2) + (\rho(\alpha)\eta(s_2))\mu(s_1) - (\rho(\alpha)\mu(s_2))\eta(s_1) \\ &= \rho(\alpha)(\mu(s_1)\eta(s_2) - \mu(s_2)\eta(s_1)) \\ &= \rho(\alpha)(\mu \wedge \eta)(s_1, s_2), \end{aligned}$$

womit die zweite Aussage gezeigt ist.

iii.) Für die linke Seite gelten die Leibniz-Regeln

$$[\omega, f\mu]_* = f[\omega, \mu]_* + [\omega, f]_*\mu$$

sowie

$$[f\omega, \mu]_* = f[\omega, \mu]_* + [f, \mu]_*\omega.$$

Mit Hilfe des bisher gezeigten finden wir, dass für die rechte Seite die gleichen Leibniz-Regeln gelten, sodass es wieder reicht, die Behauptung auf Formen $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, $\mu = \beta_1 \wedge \beta_2$ zu überprüfen. Wir rechnen also für die linke Seite

$$\begin{aligned} & [\alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \wedge \beta_2]_*(s_1, s_2, s_3) \\ &= ([\alpha_1, \beta_1]_* \wedge \alpha_2 \wedge \beta_2)(s_1, s_2, s_3) - ([\alpha_1, \beta_2]_* \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1)(s_1, s_2, s_3) \\ & \quad - ([\alpha_2, \beta_1]_* \wedge \alpha_1 \wedge \beta_2)(s_1, s_2, s_3) + ([\alpha_2, \beta_2]_* \wedge \alpha_1 \wedge \beta_1)(s_1, s_2, s_3). \end{aligned}$$

Für die ersten drei Terme auf der rechten Seite der zu zeigenden Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} & \langle [(\alpha_1 \wedge \alpha_2)(s_1), s_2]_*, (\beta_1 \wedge \beta_2)(s_3) \rangle \\ &= \alpha_1(s_1)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_2(s_2))) - \alpha_1(s_1)\beta_1(s_3)\langle s_2, [\alpha_2, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_1(s_1)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_1(s_2))) + \alpha_1(s_1)\beta_2(s_3)\langle s_2, [\alpha_2, \beta_1]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_2(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\beta_2)(\alpha_1(s_1))) - \alpha_2(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\beta_1)(\alpha_1(s_1))) \\ & \quad - \alpha_2(s_1)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_2(s_2))) + \alpha_2(s_1)\beta_1(s_3)\langle s_2, [\alpha_1, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_2(s_1)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_1(s_2))) - \alpha_2(s_1)\beta_2(s_3)\langle s_2, [\alpha_1, \beta_1]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_1(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\beta_2)(\alpha_2(s_1))) + \alpha_1(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\beta_1)(\alpha_2(s_1))) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \langle [s_1, (\alpha_1 \wedge \alpha_2)(s_2)]_*, (\beta_1 \wedge \beta_2)(s_3) \rangle \\ &= \alpha_1(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\beta_2)(\alpha_2(s_1))) + \alpha_1(s_2)\beta_1(s_3)\langle s_1, [\alpha_2, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_1(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_2(s_1))) - \alpha_1(s_2)\beta_2(s_3)\langle s_1, [\alpha_2, \beta_1]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_1(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_1(s_1))) - \alpha_1(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\beta_1)(\alpha_2(s_1))) \\ & \quad - \alpha_2(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\beta_2)(\alpha_1(s_1))) - \alpha_2(s_2)\beta_1(s_3)\langle s_1, [\alpha_1, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_2(s_2)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_2(s_1))) + \alpha_2(s_2)\beta_2(s_3)\langle s_1, [\alpha_1, \beta_1]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_2(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_1(s_1))) + \alpha_2(s_2)\beta_2(s_3)(\rho(\beta_1)(\alpha_1(s_1))) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \langle [(\alpha_1 \wedge \alpha_2)(s_1), (\beta_1 \wedge \beta_2)(s_2)]_*, s_3 \rangle \\ &= \alpha_1(s_1)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_1(s_2))) + \alpha_1(s_1)\beta_1(s_2)\langle s_3, [\alpha_2, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_2(s_3)\beta_1(s_2)(\rho(\beta_2)(\alpha_1(s_1))) - \alpha_1(s_1)\beta_2(s_2)\langle s_3, [\alpha_2, \beta_1]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_2(s_3)\beta_2(s_2)(\rho(\beta_1)(\alpha_1(s_1))) - \alpha_1(s_1)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_2)(\beta_2(s_2))) \\ & \quad - \alpha_2(s_1)\beta_2(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_1(s_2))) - \alpha_2(s_1)\beta_1(s_2)\langle s_3, [\alpha_1, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad + \alpha_1(s_3)\beta_1(s_2)(\rho(\beta_2)(\alpha_2(s_1))) - \alpha_2(s_1)\beta_1(s_2)\langle s_3, [\alpha_1, \beta_2]_c \rangle \\ & \quad - \alpha_1(s_3)\beta_2(s_2)(\rho(\beta_1)(\alpha_2(s_1))) + \alpha_2(s_1)\beta_1(s_3)(\rho(\alpha_1)(\beta_2(s_2))). \end{aligned}$$

Die verbleibenden drei Terme erhält man jetzt aus den obigen Gleichungen durch Vertauschen der α 's und β 's. Summiert man nun alles auf der rechten Seite auf, so bleiben nur Terme der Form $\alpha_1(s_1)\beta_1(s_3)\langle s_2, [\alpha_2, \beta_2]_c \rangle$ usw. übrig, und man erkennt, dass diese verbleibenden Terme gerade die ausmultiplizierte Version der oben berechneten linken Seiten darstellen.

□

Wir haben also insbesondere die Gleichung

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega]_*(s_1, s_2, s_3) = \langle [\omega(s_1), s_2]_c, \omega(s_3) \rangle + \langle [s_1, \omega(s_2)]_c, \omega(s_3) \rangle + \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_c, s_3 \rangle$$

gezeigt, d.h. die quadratischen Terme der Deformationsbedingung in Abschnitt 3.3.1 werden durch $\frac{1}{2}[\omega, \omega]_*$ erfasst.

Ist L^* auch eine Dirac-Struktur, so ist (L, L^*) ein Lie-Bialgebroid (siehe A.10) [33]. In diesem Fall ist d_L eine Superderivation vom Grad Eins bezüglich der Schouten-Nijenhuis-Klammer $[\cdot, \cdot]_*$. Wir werden jetzt zeigen, dass diese Aussage auch im allgemeinen Fall weiterhin richtig bleibt.

Im folgenden bezeichnen wir mit pr_L bzw. pr_{L^*} die Projektion auf L bzw. L^* oder benutzen die kürzeren Schreibweisen $e_L := \text{pr}_L(e)$ und $e_{L^*} := \text{pr}_{L^*}(e)$ für $e \in \Gamma^\infty(L \oplus L^*)$. Es gilt dann für $s \in \Gamma^\infty(L)$, $e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(L \oplus L^*)$ und $f \in C^\infty(M)$

$$\langle d_L f, s \rangle = \rho(s)f = \langle \mathcal{D}f, s \rangle = \langle \text{pr}_{L^*}(\mathcal{D}f), s \rangle = \langle \mathcal{D}f_{L^*}, s \rangle$$

sowie

$$\langle e_1|_{L^*}, e_2 \rangle = \langle \text{pr}_{L^*}(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, \text{pr}_L(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2|_L \rangle.$$

Lemma 3.3.5. *Sei $s \in \Gamma^\infty(L)$ und $\alpha \in \Gamma^\infty(L^*)$. Dann gilt*

$$i.) \quad [s, \alpha]_{L^*} = \mathcal{L}_s \alpha$$

$$ii.) \quad [\alpha, s]_{L^*} = -i_s d_L \alpha \quad \text{bzw.} \quad \langle [\alpha, s_1]_c, s_2 \rangle = -d_L \alpha(s_1, s_2) \quad \text{für } s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(L).$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{L}_s = d_L i_s + i_s d_L$ die Lieableitung (siehe Def. A.7) auf dem Lie-Algebroid L .

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich aus der folgenden Rechnung, wobei $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(L)$,

$$\begin{aligned} \langle [s_1, \alpha]_c, s_2 \rangle &= -\langle \alpha, [s_1, s_2]_c \rangle + \rho(s_1)\alpha(s_2) \\ &= d_L \alpha(s_1, s_2) + \rho(s_2)\alpha(s_1) \\ &= \langle i_{s_1} d_L \alpha + d_L i_{s_1} \alpha, s_2 \rangle, \end{aligned}$$

die zweite Behauptung folgt jetzt mit

$$\langle [\alpha, s_1]_c, s_2 \rangle = -\langle [s_1, \alpha]_c, s_2 \rangle + \rho(s_2)\alpha(s_1) = -\langle i_{s_1} d_L \alpha, s_2 \rangle.$$

□

Mit diesen beiden Lemmata können wir nun folgendes zeigen:

Lemma 3.3.6. *Seien $f, g \in C^\infty(M)$ und $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(L^*)$. Dann gilt*

$$i.) \quad d_L[f, g]_* = 0 = [d_L f, g]_* - [f, d_L g]_*$$

$$ii.) \quad d_L[\alpha, f]_* = [d_L\alpha, f]_* + [\alpha, d_Lf]_*$$

$$iii.) \quad d_L[\alpha, \beta]_* = [d_L\alpha, \beta]_* + [\alpha, d_L\beta]_*$$

Beweis. *i.)* Es gilt

$$[d_Lf, g]_* = \rho(d_Lf)g = \langle \mathcal{D}g, d_Lf \rangle = \langle \mathcal{D}g, \text{pr}_{L^*}(\mathcal{D}f) \rangle$$

sowie

$$[f, d_Lg]_* = -\langle \mathcal{D}f, \text{pr}_{L^*}(\mathcal{D}g) \rangle = -\langle \mathcal{D}g, \text{pr}_L(\mathcal{D}f) \rangle$$

und damit

$$[d_Lf, g]_* - [f, d_Lg]_* = \langle \mathcal{D}f, \mathcal{D}g \rangle = 0.$$

ii.) Sei $s \in \Gamma^\infty(L)$. Dann rechnen wir für die linke Seite

$$\langle d_L[\alpha, f]_*, s \rangle = \langle d_L(\rho(\alpha)f), s \rangle = \rho(s)\rho(\alpha)f = -\rho([\alpha, s]_c)f + \rho(\alpha)\rho(s)f$$

und für die rechte Seite

$$\langle [d_L\alpha, f]_*, s \rangle = [d_L\alpha(s), f]_* = \rho(d_L\alpha(s))f = -\rho([\alpha, s]_{L^*})f$$

sowie

$$\langle [\alpha, d_Lf]_*, s \rangle = -\langle d_Lf, [\alpha, s]_c \rangle + \rho(\alpha)\langle d_Lf, s \rangle = -\rho([\alpha, s]_L)f + \rho(\alpha)\rho(s)f.$$

Damit ist die zweite Aussage gezeigt.

iii.) Zunächst erhalten wir mit $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(L)$ für die linke Seite:

$$\begin{aligned} d_L[\alpha, \beta]_*(s_1, s_2) &= \langle i_{s_1} d_L[\alpha, \beta]_*, s_2 \rangle = -\langle [[\alpha, \beta]_*, s_1]_c, s_2 \rangle \\ &= -\langle [[\alpha, \beta]_c, s_1]_c, s_2 \rangle + \langle [[\alpha, \beta]_L, s_1]_c, s_2 \rangle \\ &= -\langle [\alpha, [\beta, s_1]_c]_c, s_2 \rangle + \langle [\beta, [\alpha, s_1]_c]_c, s_2 \rangle \\ &= \langle [\beta, s_1]_c, [\alpha, s_2]_c \rangle - \rho(\alpha)\langle [\beta, s_1]_c, s_2 \rangle \\ &\quad - \langle [\alpha, s_1]_c, [\beta, s_2]_c \rangle + \rho(\beta)\langle [\alpha, s_1]_c, s_2 \rangle \\ &= \langle [\beta, s_1]_c, [\alpha, s_2]_c \rangle + \rho(\alpha)d_L\beta(s_1, s_2) \\ &\quad - \langle [\alpha, s_1]_c, [\beta, s_2]_c \rangle - \rho(\beta)d_L\alpha(s_1, s_2) \end{aligned}$$

Weiter mit der rechten Seite:

$$\begin{aligned} [d_L\alpha, \beta]_*(s_1, s_2) &= \langle [d_L\alpha(s_1), \beta]_c, s_2 \rangle - \langle [d_L\alpha(s_2), \beta]_c, s_1 \rangle + \rho(\beta)d_L\alpha(s_1, s_2) \\ &= -\langle [\beta, d_L\alpha(s_1)]_c, s_2 \rangle + \langle [\beta, d_L\alpha(s_2)]_c, s_1 \rangle + \rho(\beta)d_L\alpha(s_1, s_2) \\ &= \langle i_{s_1} d_L\alpha, [\beta, s_2]_c \rangle - \langle i_{s_2} d_L\alpha, [\beta, s_1]_c \rangle - \rho(\beta)d_L\alpha(s_1, s_2) \\ &= -\langle [\alpha, s_1]_{L^*}, [\beta, s_2]_c \rangle + \langle [\alpha, s_2]_{L^*}, [\beta, s_1]_c \rangle - \rho(\beta)d_L\alpha(s_1, s_2) \\ \\ [\alpha, d_L\beta]_*(s_1, s_2) &= -[d_L\beta, \alpha]_*(s_1, s_2) \\ &= \langle [\beta, s_1]_{L^*}, [\alpha, s_2]_c \rangle - \langle [\beta, s_2]_{L^*}, [\alpha, s_1]_c \rangle + \rho(\alpha)d_L\beta(s_1, s_2) \\ &= \langle [\beta, s_1]_c, [\alpha, s_2]_L \rangle - \langle [\beta, s_2]_c, [\alpha, s_1]_L \rangle + \rho(\alpha)d_L\beta(s_1, s_2) \end{aligned}$$

Damit folgt nun die Behauptung. □

Satz 3.3.7. *Das Lie-Algebroiddifferential d_L ist eine Superderivation vom Grad Eins bezüglich $[\cdot, \cdot]_*$, d.h. für $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^k L^*)$ und $\mu \in \Gamma^\infty(\wedge^l)$ gilt*

$$d_L[\omega, \mu]_* = [d_L\omega, \mu]_* + (-1)^{k-1}[\omega, d_L\mu]_*.$$

Beweis. Definieren wir für $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^k L^*)$ eine Abbildung ad_ω durch $ad_\omega(\mu) = [\omega, \mu]_*$ für $\mu \in \Gamma^\infty(\wedge^\bullet L^*)$, dann ist ad_ω aufgrund der Leibniz-Regel für $[\cdot, \cdot]_*$ eine Superderivation bezüglich des Dachproduktes vom Grad $k-1$. Weiter ist d_L eine Superderivation vom Grad Eins, und damit ist der Superkommutator

$$[d_L, ad_\omega] = d_L \circ ad_\omega - (-1)^{k-1} ad_\omega \circ d_L$$

eine Derivation vom Grad k . Andererseits ist aber auch $ad_{d_L\omega}$ eine Superderivation vom Grad k , und nach dem obigen Lemma stimmen beide auf den Erzeugern $C^\infty(M)$ und $\Gamma^\infty(L^*)$ von $\Gamma^\infty(\wedge^\bullet L^*)$ überein. Damit folgt aber sofort

$$d_L \circ ad_\omega(\mu) - (-1)^{k-1} ad_\omega \circ d_L\mu = ad_{d_L\omega}(\mu)$$

für alle $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^k L^*)$ und $\beta \in \Gamma^\infty(\wedge^\bullet L^*)$. □

Wir haben bis jetzt insbesondere gezeigt:

Satz 3.3.8 ([33, Theorem 2.6]). *Seien L und L' transversale Dirac-Strukturen in einem Courant-Algebroid E . Dann ist (L, L') ein Lie-Bialgebroid, wobei L' vermöge der in E gegebenen Bilinearform mit L^* identifiziert wird, und das dadurch definierte Courant-Algebroid $L \oplus L'$ stimmt mit E überein.*

Wir wollen jetzt die Gleichung, die $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$ erfüllen muss, damit $L = \text{graph}(\omega)$ eine Dirac-Struktur ist, mit Hilfe der Klammer $[\cdot, \cdot]_*$ formulieren. Doch sei zuerst noch eine 3-Form $T_\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^3 L^*)$ durch

$$T_\omega(s_1, s_2, s_3) = \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_c, \omega(s_3) \rangle$$

definiert. Die Antisymmetrie von T_ω folgt dabei mit der Isotropie von L^* , denn es gilt

$$\begin{aligned} T_\omega(s_1, s_2, s_3) &= \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_c, \omega(s_3) \rangle \\ &= -\langle [\omega(s_2), \omega(s_1)]_c, \omega(s_3) \rangle + \rho(\omega(s_3))\langle \omega(s_1), \omega(s_2) \rangle \\ &= -T_\omega(s_2, s_1, s_3) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} T_\omega(s_1, s_2, s_3) &= \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_c, \omega(s_3) \rangle \\ &= -\langle \omega(s_2), [\omega(s_1), \omega(s_3)]_c \rangle + \rho(\omega(s_1))\langle \omega(s_2), \omega(s_3) \rangle \\ &= -T_\omega(s_1, s_3, s_2). \end{aligned}$$

Aus der Antisymmetrie folgt jetzt auch, dass T_ω tensoriell ist, da die $C^\infty(M)$ -Linearität im dritten Argument offensichtlich ist. Damit haben wir den folgenden Satz gezeigt:

Satz 3.3.9. *Sei E ein Courant-Algebroid mit Dirac-Struktur L . Sei weiter L' ein isotropes Komplement von L . Identifizieren wir E mit $L \oplus L^*$, dann ist $\text{graph}(\omega)$ für eine Zweiform $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$ genau dann eine Dirac-Struktur, wenn die Gleichung*

$$d_L\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_* + T_\omega = 0$$

erfüllt ist.

3.3.3 Formale Dirac-Strukturen

Die Gleichung, die ω in Lemma 3.3.9 erfüllen muss, ist also eine Gleichung in $\Gamma^\infty(\bigwedge^3 L^*)$. Damit haben wir jetzt eine Möglichkeit gefunden, wie wir die formale Deformationstheorie beschreiben können.

Definition 3.3.10. Seien die Voraussetzungen von Satz 3.3.9 gegeben. Eine formale Deformation der Dirac-Struktur $L = L_0$ ist eine formale Potenzreihe

$$\omega_t = t \omega_1 + t^2 \omega_2 + \dots \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 L^*)[[t]],$$

so dass die Gleichung

$$d_L \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_* + T_\omega = 0$$

in jeder Ordnung von t erfüllt ist. Eine formale Deformation der Ordnung N ist eine formale Reihe $\omega_t = t \omega_1 + \dots$, so dass die obige Gleichung bis zur Ordnung N erfüllt ist.

Wählen wir in E ein anderes isotropes Komplement L' zu L , dann erhalten wir natürlich einen anderen Isomorphismus $E \cong L \oplus L^*$ und damit eine andere Courant-Algebroidstruktur auf $L \oplus L^*$. Diese beiden Strukturen sind nach Konstruktion isomorph, und der Isomorphismus $\Phi : L \oplus L^* \rightarrow L \oplus L^*$ zwischen beiden Strukturen ist eingeschränkt auf L die Identität. Da Φ eine Isometrie ist, folgt ähnlich wie in Lemma 3.2.10, dass Φ von der Form

$$\Phi(e, \alpha) = \nu_\Lambda(e, \alpha) := (e + \Lambda(\alpha), \alpha)$$

mit $\Lambda \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 L)$, aufgefasst als Abbildung $\Lambda : L^* \rightarrow L$, ist. Sei nun $L_t = \text{graph}(\omega_t)$. Man überlegt sich leicht, dass $\nu_\Lambda(L_t)$ genau dann wieder ein Graph ist, wenn $(\text{id} + \Lambda \omega_t)$ invertierbar ist (was im formalen Fall stets gilt) und dass dann $\nu_\Lambda(L_t) = \text{graph}(\omega'_t)$ mit $\omega'_t = \omega_t(\text{id} + \Lambda \omega)^{-1}$ folgt.

Die beiden folgenden Beispiele zeigen, dass unsere Überlegungen in diesen Spezialfällen die bekannten Ergebnisse reproduzieren.

3.3.4 Präsymplektische Mannigfaltigkeiten

Ist $L = \text{graph}(\omega)$ für eine geschlossene 2-Form ω , dann ist T^*M eine zu L transversale Dirac-Struktur und wir können L^* mit T^*M identifizieren. In diesem Fall ist $L \oplus L^*$ ein Lie-Bialgebroid, wobei die Lie-Klammer auf L^* identisch Null ist. Für eine t -abhängige 2-Form $\eta_t : L \rightarrow L^*$ ist $L_t = \text{graph}(\eta_t)$ eine Dirac-Struktur, wenn $d_L \eta_t = 0$ gilt. Identifizieren wir L auf offensichtliche Weise mit TM , so wird aus d_L das gewöhnliche deRham-Differential auf M und aus η_t eine 2-Form η'_t auf M . Genauer gesagt betrachten wir die Eichtransformation τ_ω , die wegen der Geschlossenheit von ω ein Automorphismus von $TM \oplus T^*M$ ist. Dies liefert einen Lie-Algebroid-Isomorphismus $\tau_\omega|_{TM} : TM \xrightarrow{\sim} \text{graph}(\omega)$ und es gilt dann $L_t = \text{graph}(\omega + \eta'_t) = \tau_{\omega + \eta'_t}(TM)$. Wir erhalten also das bekannte Ergebnis, dass L_t genau dann eine Dirac-Struktur ist, wenn $\omega + \eta'_t$ geschlossen ist.

Triviale Deformationen von L sind solche, die sich als $L_t = \mathcal{F}\phi_t(L)$ für einen Diffeomorphismus ϕ_t von M schreiben lassen. Dies bedeutet in diesem Fall, dass

$$\omega_t = \phi_t^* \omega_0$$

mit $\omega_t = \omega + \eta'_t$. Wir nehmen nun an, dass wir eine global definierte zeitabhängige Einsform β_t finden können, so dass

$$d\beta_t = \frac{d}{dt}\omega_t = \dot{\omega}_t.$$

Falls ω_t symplektisch ist, können wir durch

$$i_{X_t}\omega_t = -\beta_t$$

ein zeitabhängiges Vektorfeld definieren. War M kompakt, so ist der Fluss (oder genauer die Zeitentwicklung) ψ_t zu X_t für alle t definiert. In Allgemeinen finden wir zumindest für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung, auf der der Fluss ψ_t für t in einem Intervall $[0, \epsilon]$ mit $\epsilon > 0$ definiert ist. Ableiten von $\psi_t^*\omega_t$ liefert jetzt

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t = \psi_t^*(i_{X_t}d\omega + di_{X_t}\omega + \dot{\omega}_t) = \psi_t^*d(i_{X_t}\omega + \beta_t) = 0,$$

und damit $\psi_t^*\omega_t = \psi_0^*\omega_0 = \omega_0$.

Umgekehrt erhalten wir für eine triviale Deformation $\omega_t = \phi_t^*\omega_0$ durch Ableiten nach t die Gleichung

$$\dot{\omega}_t = \phi_t^*di_{X_t}\omega_0 = d\phi_t^*i_{X_t}\omega_0,$$

also ist $\dot{\omega}_t$ exakt. Durch weiteres Ableiten folgt schließlich, dass

$$\frac{d^k\omega_t}{dt^k}$$

für alle $k > 0$ exakt ist. Wir definieren deshalb:

Definition 3.3.11. Seien ω_t und ω'_t zwei formale Deformationen von $\omega = \omega_0$. Dann heißen ω_t und ω'_t äquivalent, wenn es einen formalen Diffeomorphismus

$$\phi_t = \exp(\mathcal{L}_{X_t})$$

mit $X_t = tX_1 + t^2X_2 + \dots \in \mathcal{X}(M)[[t]]$ gibt, so dass

$$\omega'_t = \phi_t(\omega_t).$$

Eine Deformation ω_t heißt trivial, wenn ω_t äquivalent zu ω_0 ist,

$$\omega_t = \phi_t(\omega_0).$$

Bemerkung 3.3.12. Man kann zeigen, dass die homogenen Automorphismen der Algebra

$$(\Omega^\bullet(M)[[t]], \wedge),$$

die in unterster Ordnung mit der Identität beginnen, von der Form $\exp(D_t)$ mit einer formalen Reihe $D_t = tD_1 + tD_2 + \dots$ von Derivationen von $\Omega^\bullet(M)$ sind [50]. Verlangen wir weiter, dass $[d, \exp(D_t)] = 0$, so folgt $[d, D_k] = 0$ für alle $k \geq 1$ und nach Bemerkung 2.4.8 muss dann $D_k = \mathcal{L}_{X_k}$ für ein Vektorfeld X_k gelten. D.h. die homogenen Automorphismen von $(\Omega^\bullet(M)[[t]], \wedge)$, die in unterster Ordnung mit der Identität beginnen und die Gleichung $d\omega = 0$ invariant lassen, sind genau die von der Form $\exp(\mathcal{L}_{X_t})$.

Sei $\omega_t = \omega_0 + t^{k+1}\omega_{k+1} + \dots$ die Deformation einer symplektischen Form, die bis zur Ordnung k mit ω_0 übereinstimmt. Ist ω_{k+1} exakt, $\omega_k = d\alpha$, so ist ω_t bis zur Ordnung $k+1$ äquivalent zu ω_0 . Um das zu sehen definieren wir durch $\alpha = i_{X_{k+1}}\omega_0$ ein Vektorfeld X_{k+1} und setzen $\phi_t = \exp(t^{k+1}\mathcal{L}_{X_{k+1}})$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\phi_t(\omega_0) &= \omega_0 + t^{k+1}\mathcal{L}_{X_{k+1}}\omega_0 + \dots \\ &= \omega_0 + t^{k+1}di_{X_{k+1}}\omega_0 + \dots \\ &= \omega_0 + t^{k+1}\omega_{k+1} + \dots \\ &= \omega_t + t^{k+2}(\dots).\end{aligned}$$

Ist $H_{dR}^2(M) = 0$, so sind also alle Deformationen trivial. Falls wir nun aber eine präsymplektische Form ω_0 deformieren wollen, können wir die Gleichung $\alpha = i_X\omega_0$ im Allgemeinen nicht mehr lösen. Damit lässt sich nicht mehr nur anhand der deRahm-Kohomologie von M entscheiden, ob es nichttriviale Deformationen gibt oder nicht.

3.3.5 Poisson-Mannigfaltigkeiten

Sei $L = \text{graph}(\pi)$ für einen Poisson-Bivektor π auf M . Wir können L mit T^*M und L^* mit TM identifizieren. Die Lie-Algebroidstruktur auf TM ist die kanonische, während die Lie-Klammer auf T^*M die Koszul-Klammer

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{L}_{\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta))$$

und der Anker durch $\pi : T^*M \rightarrow TM$ gegeben ist. Wir erhalten dadurch eine Courant-Algebroidstruktur auf $T^*M \oplus TM$, die aber nicht mit der kanonischen Courant-Algebroidstruktur übereinstimmt. Weiter ist $d_L = [\pi, \cdot]$ und für eine t -abhängige 2-Form $\mu_t : L \rightarrow L^*$ mit $\mu_0 = 0$ ist die Gleichung $d_L\mu_t + \frac{1}{2}[\mu_t, \mu_t]_* = 0$ unter den obigen Identifikationen äquivalent zu

$$[\pi + \mu_t, \pi + \mu_t] = 0.$$

Insbesondere erhalten wir, dass $\text{graph}(\pi)$ für einen Bivektor π genau dann eine Dirac-Struktur ist, wenn $[\pi, \pi] = 0$ erfüllt ist.

Die Bedingung für triviale Deformationen lautet jetzt

$$\text{graph}(\Pi_t) = \mathcal{F}\phi_t(\text{graph}(\Pi_0))$$

für einen Diffeomorphismus ϕ_t von M , wobei jetzt $\Pi_t = \pi + \mu_t$ sei. Dies bedeutet aber

$$\Pi_t = \phi_t^*\Pi_0,$$

so dass wir die bekannte Charakterisierung trivialer Deformationen erhalten.

3.3.6 Lie-Bialgebroide

Wir betrachten nun noch den Fall genauer, dass wir eine Aufspaltung von E in transversale Dirac-Strukturen L und L' finden können und (L, L^*) damit ein Lie-Bialgebroid ist. Ist $\omega_t = t\omega_1 + t^2\omega_2 + \dots$ eine formale Deformation von $\omega_0 = 0$, dann lautet die Bedingung, dass $L_t = \text{graph}(\omega_t)$ eine Dirac-Struktur ist

$$d_L\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]_* = 0.$$

Wir nehmen an, dass ω_t diese Gleichung bis zur Ordnung n erfüllt. Dann folgt

$$d_L \omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]_* = t^{n+1} \left(d_L \omega_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\omega_{n+1-i}, \omega_i]_* \right) + t^{n+2}(\dots).$$

Um die Deformation bis zur Ordnung $n+1$ fortzusetzen, müssen wir also ω_{n+1} so bestimmen, dass die Gleichung

$$d_L \omega_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\omega_{n+1-i}, \omega_i]_* = 0$$

erfüllt ist. Im Allgemeinen wird dies nicht möglich sein, man kann jedoch zeigen, dass die notwendige Bedingung

$$d_L \sum_{i=1}^n [\omega_{n+1-i}, \omega_i]_* = 0$$

immer erfüllt ist. Dazu die folgende Vorüberlegung. Zunächst gilt für eine beliebige Zweiform $\omega \in \Omega^2(L)$ aufgrund der Super-Jacobi-Identität, die in diesem Fall ja auch für $[\cdot, \cdot]_*$ erfüllt ist, die Gleichung

$$[\omega, [\omega, \omega]_*]_* = 0.$$

Definieren wir weiter durch

$$d_\omega = d_L + [\omega, \cdot]_*$$

eine \wedge -Superderivation vom Grad Eins, dann folgt

$$\begin{aligned} d_\omega(d_L \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_*) &= \frac{1}{2}[d_L \omega, \omega]_* - \frac{1}{2}[\omega, d_L \omega]_* + [\omega, d_L \omega]_* + [\omega, [\omega, \omega]_*]_* \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Gleichung auf ω_t an und betrachten die Ordnung $n+1$, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{\omega_t}(d_L \omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]_*) &= \left(d_L + t[\omega_1, \cdot]_* + \dots \right) \\ &\quad \left(t^{n+1}(d_L \omega_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\omega_{n+1-i}, \omega_i]_*) + t^{n+2}(\dots) \right) \\ &= \frac{1}{2} t^{n+1} d_L \sum_{i=1}^n [\omega_{n+1-i}, \omega_i]_* + t^{n+2}(\dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es gibt also eine Obstruktion für die Fortsetzbarkeit einer formalen Deformation in der dritten Lie-Algebroid-Kohomologie von L . Wir werden später sehen, dass diese Aussage auch in der allgemeinen Situation, also wenn L^* keine Dirac-Struktur ist, weiterhin gültig bleibt.

3.4 Courant-Algebroiden als Lie-quasi-Bialgebroiden

Ist in unserer Aufspaltung $E = L \oplus L'$ das Vektorbündel $L' \cong L^*$ ebenfalls eine Dirac-Struktur, dann wissen wir bereits, dass (L, L^*) ein Lie-Bialgebroid ist. Setzen wir

$$\psi(\alpha, \beta, \gamma) = -\langle [\alpha, \beta]_c, \gamma \rangle,$$

dann ist dadurch ein Element $\psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^3 L)$ definiert und es ist $\psi = 0$ genau dann, wenn L^* eine Dirac-Struktur ist, und genau dann erfüllt $[\cdot, \cdot]_*$ die Jacobi-Identität. Man kann deshalb vermuten, dass sich der Jacobiator von $[\cdot, \cdot]_*$ in Termen von ψ ausdrücken lässt, und wie wir gleich sehen werden, vermuten wir richtig. Wir fassen ψ im weiteren auch als eine Abbildung $\Gamma^\infty(\bigwedge^2 L^*) \rightarrow \Gamma^\infty(L)$ auf, und zwar gemäß $\psi(\alpha, \beta) = -[\alpha, \beta]_L$.

Lemma 3.4.1. *Für das eben definierte ψ gelten die folgenden Gleichungen:*

1. $\rho(\psi(\alpha, \beta)) = \rho([\alpha, \beta]_*) - [\rho(\alpha), \rho(\beta)]_c$
2. $[[\alpha, \beta]_*, \gamma]_* + [[\beta, \gamma]_*, \alpha]_* + [[\gamma, \alpha]_*, \beta]_* = i_{\psi(\alpha, \beta)} d_L \gamma + i_{\psi(\beta, \gamma)} d_L \alpha + i_{\psi(\gamma, \alpha)} d_L \beta + d_L(\psi(\alpha, \beta, \gamma))$
3. $\begin{aligned} &\rho(\alpha)\psi(\beta, \gamma, \delta) - \rho(\beta)\psi(\alpha, \gamma, \delta) + \rho(\gamma)\psi(\alpha, \beta, \delta) - \rho(\delta)\psi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\quad - \psi([\alpha, \beta]_*, \gamma, \delta) + \psi([\alpha, \gamma]_*, \beta, \delta) - \psi([\alpha, \delta]_*, \beta, \gamma) \\ &\quad - \psi([\beta, \gamma]_*, \alpha, \delta) + \psi([\beta, \delta]_*, \alpha, \gamma) - \psi([\gamma, \delta]_*, \alpha, \beta) = 0 \end{aligned}$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich sofort aus der Definition von ψ und der Gleichung $[\rho(\alpha), \rho(\beta)] = \rho([\alpha, \beta]_c)$. Für die zweite Behauptung rechnen wir mit Hilfe der Jacobi-Identität für die Courant-Klammer für alle $s \in \Gamma^\infty(L)$

$$\begin{aligned} &\langle [\alpha, [\beta, \gamma]_*]_c + [\beta, [\gamma, \alpha]_*]_c + [\gamma, [\alpha, \beta]_*]_c, s \rangle \\ &= \langle [\alpha, [\beta, \gamma]_*]_c - [\beta, [\alpha, \gamma]_*]_c - [[\alpha, \beta]_*, \gamma]_c, s \rangle \\ &= \langle -[\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c + [\beta, [\alpha, \gamma]_L]_c + [[\alpha, \beta]_L, \gamma]_c, s \rangle \\ &= -\langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c + [\beta, [\gamma, \alpha]_L]_c + [\gamma, [\alpha, \beta]_L]_c, s \rangle + \rho(s) \langle [\alpha, \beta]_L, \gamma \rangle \\ &= \langle i_{[\beta, \gamma]_L} d_L \alpha + i_{[\gamma, \alpha]_L} d_L \beta + i_{[\alpha, \beta]_L} d_L \gamma + d_L(\psi(\alpha, \beta, \gamma)), s \rangle. \end{aligned}$$

Nun zu der dritte Aussage. Wir rechnen zunächst

$$\begin{aligned} \rho(\alpha)\psi(\beta, \gamma, \delta) &= -\rho(\alpha) \langle [\beta, \gamma]_L, \delta \rangle \\ &= -\langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c, \delta \rangle - \langle [\beta, \gamma]_L, [\alpha, \delta]_c \rangle \\ &= \psi(\beta, \gamma, [\alpha, \delta]_*) - \langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c, \delta \rangle \\ &= \psi([\alpha, \delta]_*, \beta, \gamma) - \langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c, \delta \rangle. \end{aligned}$$

Damit folgt unter Verwendung der Jacobi-Identität

$$\begin{aligned} &\rho(\alpha)\psi(\beta, \gamma, \delta) - \rho(\beta)\psi(\alpha, \gamma, \delta) + \rho(\gamma)\psi(\alpha, \beta, \delta) - \rho(\delta)\psi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\quad - \psi([\alpha, \delta]_*, \beta, \gamma) + \psi([\beta, \delta]_*, \alpha, \gamma) - \psi([\gamma, \delta]_*, \alpha, \beta) \\ &= -\langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c, \delta \rangle + \langle [\beta, [\alpha, \gamma]_L]_c, \delta \rangle - \langle [\gamma, [\alpha, \beta]_L]_c, \delta \rangle + \rho(\delta) \langle [\alpha, \beta]_L, \gamma \rangle \\ &= -\langle [\alpha, [\beta, \gamma]_L]_c, \delta \rangle + \langle [\beta, [\alpha, \gamma]_L]_c, \delta \rangle + \langle [[\alpha, \beta]_L, \gamma]_c, \delta \rangle \\ &= \langle [\alpha, [\beta, \gamma]_*]_c, \delta \rangle - \langle [\beta, [\alpha, \gamma]_*]_c, \delta \rangle - \langle [[\alpha, \beta]_*, \gamma]_c, \delta \rangle \\ &= \psi([\beta, \gamma]_*, \alpha, \delta) - \psi([\alpha, \gamma]_*, \beta, \delta) + \psi([\alpha, \beta]_*, \gamma, \delta), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Die Struktur, die wir auf dem Paar (L, L^*) gefunden haben, erhält durch die folgende Definition einen Namen.

Definition 3.4.2 ([40]). Sei $A \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Dann heißt (A, A^*) Lie-quasi-Bialgebroid, wenn folgendes gilt:

- i.) $(A, [\cdot, \cdot], \rho)$ ist ein Lie-Algebroid.
- ii.) Auf A^* ist eine antisymmetrische Verknüpfung $[\cdot, \cdot]_* : \Gamma^\infty(A^*) \times \Gamma^\infty(A^*) \rightarrow \Gamma^\infty(A^*)$ sowie ein Vektorbündelhomomorphismus $\rho_* : A \rightarrow TM$ definiert, so dass die Leibniz-Regel

$$[\alpha, f\beta]_* = f[\alpha, \beta]_* + (\rho_*(\alpha)f)\beta$$

gilt. Die Jacobi-Identität wird jedoch nicht gefordert.

- iii.) Das Lie-Algebroid-Differential d_A von A ist eine Superderivation der durch $[\cdot, \cdot]_*$ und ρ_* gegebenen verallgemeinerten Schouten-Nijenhuis-Klammer auf A^* .
- iv.) Es gibt ein $\psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^3 A)$, so dass die in Lemma 3.4.1 aufgeführten Gleichungen gelten.

Weiter heißt (A, A^*) quasi-Lie-Bialgebroid, genau dann, wenn (A^*, A) ein Lie-quasi-Bialgebroid ist.

Es gilt nun der folgende Satz:

Satz 3.4.3 ([29]). Sei (A, A^*) ein Lie-quasi-Bialgebroid. Dann ist auf $E = A \oplus A^*$ eine Courant-Algebroid-Struktur gegeben. Dabei gilt für $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(A)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^\infty(A^*)$

$$\begin{aligned} [s_1 + \alpha_1, s_2 + \alpha_2]_c &= [s_1, s_2] + \mathcal{L}_{s_1}\alpha_2 - i_{s_2}d_A\alpha_1 \\ &\quad + [\alpha_1, \alpha_2]_* + i_{\alpha_1 \wedge \alpha_2}\psi + \mathcal{L}_{\alpha_1}^*s_2 - i_{\alpha_2}d_{A^*}s_1 \end{aligned}$$

sowie

$$\rho_E(s_1 + \alpha_1) = \rho(s_1) + \rho_*(\alpha_1),$$

wobei $\mathcal{L}_\alpha^* = i_\alpha d_{A^*} + d_{A^*} i_\alpha$ gilt, und d_{A^*} wie im Lie-Algebroid-Fall durch $[\cdot, \cdot]_*$ und ρ_* definiert ist⁴.

Mit dem bisher gezeigten können wir jetzt schließen, dass bereits jedes Courant-Algebroid, in dem es eine Dirac-Struktur gibt, von dieser Form ist.

Satz 3.4.4. Sei E ein Courant-Algebroid, $L \subseteq E$ eine Dirac-Struktur. Sei weiter L' ein isotropes Komplement zu L in E . Identifizieren wir L^* vermöge der Bilinearform mit L' , so ist (L, L^*) ein Lie-quasi-Bialgebroid und das dadurch gemäß Satz 3.4.3 definierte Courant-Algebroid $L \oplus L^*$ ist isomorph zu E .

Beweis. Mit den Lemmata 3.3.2, 3.3.7 und 3.4.1 ist klar, dass (L, L^*) ein Lie-quasi-Bialgebroid ist. Dass die durch E auf $L \oplus L^*$ gegebene Courant-Algebroidstruktur mit der durch das Lie-quasi-Bialgebroid (L, L^*) gegebenen Struktur übereinstimmt, ist mit Lemma 3.3.5 eine einfache Rechnung. \square

⁴Da für $[\cdot, \cdot]_*$ die Jacobi-Identität nicht zu gelten braucht, ist im Allgemeinen $d_{A^*}^2 \neq 0$.

3.5 Die Rothstein-Klammer

In der Literatur wird zur Beschreibung von Courant-Algebroiden, Lie-quasi-Bialgebroiden usw. oft das Konzept der Supermannigfaltigkeiten verwendet, siehe z.B. [40, 42, 41, 29]. Dabei wird die jeweilige Algebroid-Struktur von E in einer Funktion $\Theta \in C^\infty(T^*\Pi E)$ kodiert, wobei die Gleichung

$$\{\Theta, \Theta\} = 0$$

die erforderlichen Eigenschaften für das Algebroid garantiert. Dabei ist $\{\cdot, \cdot\}$ die kanonische Poisson-Klammer auf der Supermannigfaltigkeit $T^*\Pi E$. Die eigentliche Klammer auf E lässt sich dann als abgeleitete Klammer aus Θ rekonstruieren, und auf ähnliche Weise erhält man auch den Anker. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen, sondern verweisen auf die oben angegebene Literatur. Stattdessen verwenden wir eine dazu äquivalente Beschreibung ohne die Zuhilfenahme von Supermannigfaltigkeiten, allerdings zu dem Preis, dass wir einen Zusammenhang auf der Dirac-Struktur L wählen müssen. Deshalb zunächst einige Bemerkungen über Vektorbündel und Zusammenhänge.

3.5.1 Zurückgezogen Zusammenhänge

Sei $\pi : F \rightarrow M$ ein Vektorbündel, N eine Mannigfaltigkeit und $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Mit $C_f^\infty(N, F)$ bezeichnen wir die Abbildungen von N nach F entlang f , also Abbildungen $s : N \rightarrow F$ mit $\pi \circ s = f$. Bezeichnet $f^\#F$ das mit f zurückgezogene Bündel, dann ist $\Gamma^\infty(f^\#F)$ kanonisch isomorph zu $C_f^\infty(N, F)$ [37]. Sind $a_\alpha \in \Gamma^\infty(F)$ lokale Basisschnitte von F , dann sind $f^\#a_\alpha \in \Gamma^\infty(f^\#F)$ lokale Basisschnitte von $f^\#F$. Denn jede Abbildung $s \in C_f^\infty(N, F)$ lässt sich ja lokal als $s = s^\alpha f^\#a_\alpha$ mit $s^\alpha \in C^\infty(N)$ schreiben. Ein Zusammenhang auf F definiert nun eine kovariante Ableitung

$$f^\#\nabla : \mathfrak{X}(N) \times C_f^\infty(N, F) \rightarrow C_f^\infty(N, F),$$

insbesondere gilt für $N = M$ und $f = \text{id}$

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma^\infty(F) \rightarrow \Gamma^\infty(F).$$

Weiter zeigt sich für Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(N)$ mit $Tf(X) = 0$, dass die kovariante Ableitung von s nach X unabhängig von dem Zusammenhang ist. Wir schreiben dann für $\nabla_X s$ einfach $X(s)$.

Die Christoffelsymbole des Zusammenhangs ∇ sind lokal definierte Funktionen $\Gamma_{i\alpha}^\beta$, die in Koordinaten x^i von M durch

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} a_\alpha = \Gamma_{i\alpha}^\beta a_\beta$$

bestimmt sind. Für $f^\#\nabla$ erhält man für Koordinaten y^j von N mit einer kleinen Rechnung die Christoffelsymbole

$$\tilde{\Gamma}_{j\alpha}^\beta = \frac{\partial f^i}{\partial y^j} f^* \Gamma_{i\alpha}^\beta.$$

Der Krümmungstensor des Zusammenhangs ∇ ist für Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und einen Schnitt $s \in \Gamma^\infty(E)$ definiert als

$$R(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s,$$

für $f^\sharp \nabla$ ergibt sich dann

$$(f^\sharp R)(V, W) f^\sharp s = f^\sharp (R(Tf(V), Tf(W))s)$$

mit $V, W \in \mathfrak{X}(N)$.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $N = T^*M$ und $f = \tau$ die Kotangentialprojektion ist. Auf T^*M wollen wir zur Beschreibung der lokalen Ausdrücke kanonische Koordinaten (q^i, p_j) verwenden, also durch q^i induzierte Vektorbündelkoordinaten. Das Vorzeichen der kanonischen Poisson-Klammer auf T^*M sei so gewählt, dass für (q^i, p_j) die Gleichungen

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{q^i, p_j\} = \delta_j^i$$

gelten. Die lokalen Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial p_i}$ sind dann vertikal, d.h. es gilt $T\tau(\frac{\partial}{\partial p_i}) = 0$, und für einen Schnitt $s \in \Gamma^\infty(f^*E)$ ist, wie oben beschrieben, der Ausdruck

$$\frac{\partial s}{\partial p_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial p_i}} s$$

unabhängig von Zusammenhang. Weiter gilt

$$(\tau^\sharp \nabla)_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \tau^\sharp a_\alpha = \tau^*(\Gamma_{i\alpha}^\beta) \tau^\sharp a_\beta \quad \text{sowie} \quad (\tau^\sharp \nabla)_{\frac{\partial}{\partial p_j}} \tau^\sharp a_\alpha = 0.$$

Ist E ein Lie-Algebroid mit Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ und Anker ρ , dann definieren wir die Torsion von ∇ durch

$$T(s_1, s_2) = \nabla_{\rho(s_1)} s_2 - \nabla_{\rho(s_2)} s_1 - [s_1, s_2],$$

sowie die Torsion von $\tau^\sharp \nabla$ als

$$(\tau^\sharp T)(\tau^\sharp s_1, \tau^\sharp s_2) = \tau^\sharp (T(s_1, s_2)).$$

3.5.2 Die Rothstein-Klammer

Sei $F \rightarrow N$ ein Vektorbündel über einer symplektischen Mannigfaltigkeit (N, ω) und sei Λ der zugehörige Poisson-Tensor. Weiter sei auf F eine Pseudo-Metrik g gegeben, sowie ein metrischer Zusammenhang ∇ mit Krümmung R . Seien x^i lokale Koordinaten auf $U \subset N$ und seien s_A lokale Basisschnitte von F auf U und s^A die dualen Basisschnitte von F^* . Die Krümmung ist dann lokal durch

$$R(\partial_i, \partial_j) s_A = R_{Aij}^B s_B$$

gegeben. Wir definieren nun einen Schnitt $\hat{R} \in \Gamma^\infty(TN \otimes \bigwedge^2 F^* \otimes T^*N)$ durch

$$\hat{R} = \frac{1}{2} \partial_i \otimes \Lambda^{ij} g_{AB} R_{Cjk}^A s^B \wedge s^C \otimes dx^k.$$

Elemente $(X \otimes \psi \otimes \alpha) \in \Gamma^\infty(TN \otimes \bigwedge^2 F^* \otimes T^*N)$ können wir als Abbildungen $\Gamma^\infty(TN \otimes \bigwedge^\bullet F^*) \rightarrow \Gamma^\infty(TN \otimes \bigwedge^{\bullet+2} F^*)$ auffassen, wobei

$$(X \otimes \phi \otimes \alpha)(Y \otimes \psi) := \alpha(Y) X \otimes \phi \wedge \psi.$$

Insbesondere gilt dann

$$\hat{R}(X \otimes \psi) = \frac{1}{2} \partial_i \Lambda^{ij} g_{AB} R_C^A(\partial_j, X) s^B \wedge s^C \wedge \psi.$$

Durch Verknüpfung der Abbildungen können wir jetzt \hat{R}^2, \hat{R}^3 usw. bilden. Da \hat{R} den Grad des $\bigwedge^{\bullet} F^*$ -Anteils immer um zwei erhöht, ist \hat{R} nilpotent und durch

$$(\text{id} - \hat{R})^{-\frac{1}{2}} = \text{id} + \frac{1}{2}\hat{R} + \frac{3}{8}\hat{R}^2 + \dots$$

ist ein Schnitt in $\Gamma^\infty(TM \otimes \bigwedge^{\bullet} F^* \otimes T^*M)$ wohldefiniert. Für $S \in \Gamma^\infty(TN \otimes \bigwedge^{\bullet} F^* \otimes T^*N)$ sei S_j^i der durch die Gleichung

$$S = \partial_i \otimes S_j^i \otimes dx^j$$

lokal definierte Schnitt in $\Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet} F^*)$. Schließlich sollen $i(s)$ bzw. $j(s)$ das Links- bzw. Rechts einsetzen von $s \in \Gamma^\infty(F)$ in Elemente aus $\Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet} F^*)$ bezeichnen. Damit können wir den folgenden Satz formulieren, für einen Beweis siehe z.B. [6].

Satz 3.5.1 (Rothstein-Klammer). *Auf den Schnitten $\Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet} F^*)$ ist durch die Rothstein-Poisson-Klammer, gegeben durch*

$$\{\phi, \psi\}_{\mathcal{R}} = \Lambda^{ij} (1 - \hat{R})^{\frac{1}{2}}_i^k \wedge (1 - \hat{R})^{\frac{1}{2}}_j^l \wedge \nabla_{\partial_k} \phi \wedge \nabla_{\partial_l} \psi + g^{AB} j(s_A) \phi \wedge i(s_B) \psi,$$

eine Super-Poisson-Klammer erklärt, das heißt, für $\phi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k F^*)$, $\psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^l F^*)$ und $\eta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet} F^*)$ gilt

1. $\{\phi, \psi\}_{\mathcal{R}} = -(-1)^{kl} \{\psi, \phi\}_{\mathcal{R}}$
2. $\{\phi, \psi \wedge \eta\}_{\mathcal{R}} = \{\phi, \psi\}_{\mathcal{R}} \wedge \eta + (-1)^{kl} \psi \wedge \{\phi, \eta\}_{\mathcal{R}}$
3. $\{\phi, \{\psi, \eta\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} = \{\{\phi, \psi\}_{\mathcal{R}}, \eta\}_{\mathcal{R}} + (-1)^{kl} \{\psi, \{\phi, \eta\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}}.$

Wir wollen jetzt die Rothstein-Klammer für eine spezielle Situation bestimmen. Sei $L \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit k -dimensionaler Faser über der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Sei auf L ein Zusammenhang ∇ gegeben mit Krümmung R . Seien q^i lokale Koordinaten von M und seien a_α lokale Basisschnitte von L sowie a^α dazu duale lokale Basisschnitte von L^* . Auf $L^* \oplus L$ ist dann durch

$$\nabla_X(\alpha, e) = (\nabla_X \alpha, \nabla_X e)$$

ein Zusammenhang definiert, der bezüglich der kanonischen Bilinearform auf $L^* \oplus L$ metrisch ist. Denn es gilt ja für $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $(\alpha_1, s_1), (\alpha_2, s_2) \in \Gamma^\infty(L^* \oplus L)$

$$\begin{aligned} \nabla_X \langle (\alpha_1, s_1), (\alpha_2, s_2) \rangle &= \nabla_X \langle \alpha(s_2) \rangle + \nabla_X \langle \alpha_2(s_1) \rangle \\ &= \langle \nabla_X \alpha_1, s_2 \rangle + \langle \alpha_1, \nabla_X s_2 \rangle + \langle \nabla_X \alpha_2, s_1 \rangle + \langle \alpha_2, \nabla_X s_1 \rangle \\ &= \langle \nabla_X(\alpha_1, s_1), (\alpha_2, s_2) \rangle + \langle (\alpha_1, s_1), \nabla_X(\alpha_2, s_2) \rangle. \end{aligned}$$

Sei \bar{R} die Krümmung dieses Zusammenhangs. Wählen wir

$$f_1, \dots, f_A, \dots, f_{2k} = a^1, \dots, a^k, a_1, \dots, a_k$$

als lokale Trivialisierung von $L^* \oplus L$, dann folgt

$$\bar{R}_{Aij}^B = \begin{cases} -R_{Bij}^A & \text{für } 1 \leq A, B \leq k \\ R_{A-k,ij}^{B-k} & \text{für } k+1 \leq A, B \leq 2k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen nun $F = \tau^\sharp(L^* \oplus L) = (\tau^\sharp(L \oplus L^*))^*$ mit $\tau : T^*M \rightarrow M$. Wie oben beschrieben liefert der Zusammenhang auf L einen Zusammenhang auf F , und sei \tilde{R} dessen Krümmung. Auf T^*M wollen wir kanonische Koordinaten (q, p) verwenden. Der Poisson-Tensor Λ ist dann durch $\Lambda(dq^i, dp_j) = \delta_j^i = -\Lambda(dp_j, dq^i)$ sowie $\Lambda(dq^i, dq^j) = \Lambda(dp_i, dp_j) = 0$ bestimmt. Beachten wir noch, dass der lokale Ausdruck für den Krümmungstensor von \tilde{R} bezüglich der q -Indizes durch $\tilde{R}_{Aij}^B = \tau^* \tilde{R}_{Aij}^B$ gegeben ist und für ein p -Index verschwindet, so erhält man mit einer kleinen Rechnung die Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{R}\left(\frac{\partial}{\partial q^i} \otimes \psi\right) &= \frac{\partial}{\partial p_j} \otimes \tau^* R_{\beta ij}^\alpha \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}^\beta \wedge \psi \\ \hat{R}\left(\frac{\partial}{\partial p_i} \otimes \psi\right) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $\psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ und \hat{R} die zuvor beschriebene Abbildung zu der Krümmung \tilde{R} ist. Damit folgt $\hat{R}^2 = 0$ und somit

$$(\text{id} - \hat{R})^{-\frac{1}{2}} = \text{id} + \frac{1}{2} \hat{R}.$$

Mit diesen Vorbereitungen kann man durch eine kleine Rechnung die Rothstein-Klammer in eine etwas konkretere Form bringen.

Lemma 3.5.2 ([17]). *Für die eben beschriebene Rothstein-Klammer auf $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ gilt*

$$\begin{aligned} \{\phi, \psi\}_{\mathcal{R}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \phi \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} \psi - \frac{\partial}{\partial p_i} \phi \wedge \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} \psi + \tau^* R_{\beta ij}^\alpha \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}^\beta \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} \phi \wedge \frac{\partial}{\partial p_j} \psi \\ &\quad + j(\tilde{a}_\alpha) \phi \wedge i(\tilde{a}^\alpha) \psi + j(\tilde{a}^\alpha) \phi \wedge i(\tilde{a}_\alpha) \psi. \end{aligned}$$

Dabei sind jetzt ψ und ϕ Schnitte in $\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*)$, sowie $\tilde{a}_\alpha = \tau^\sharp a_\alpha$ die zurückgeholten Basisschnitte und entsprechend ist $\tilde{a}^\alpha = \tau^\sharp a^\alpha$.

3.5.3 Super-Darbouxkoordinaten

Berechnen wir die Rothstein-Klammern für die Koordinatenfunktionen $q^i, p_j, \tilde{a}^\alpha, \tilde{a}_\beta$ von $\tau^\sharp(L \oplus L^*)$, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \{q^i, q^j\}_{\mathcal{R}} &= 0 & \{q^i, p_j\}_{\mathcal{R}} &= \delta_j^i & \{p_i, p_j\}_{\mathcal{R}} &= \tau^* R_{\beta ij}^\alpha \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}^\beta \\ \{q^i, \tilde{a}_\alpha\}_{\mathcal{R}} &= 0 & \{q^i, \tilde{a}^\alpha\}_{\mathcal{R}} &= 0 \\ \{p_i, \tilde{a}_\alpha\}_{\mathcal{R}} &= -\tau^* \Gamma_{i\alpha}^\beta \tilde{a}_\beta & \{p_i, \tilde{a}^\alpha\}_{\mathcal{R}} &= \tau^* \Gamma_{i\beta}^\alpha \tilde{a}^\beta \\ \{\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} &= 0 & \{\tilde{a}^\alpha, \tilde{a}^\beta\}_{\mathcal{R}} &= 0 & \{\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}^\beta\}_{\mathcal{R}} &= \delta_\alpha^\beta, \end{aligned}$$

und mit Hilfe der Leibniz-Regel ist die Rothstein-Klammer damit für alle Schnitte

$$\Psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$$

bekannt.

Proposition 3.5.3. *Definieren wir*

$$r_i = p_i - \tau^* \Gamma_{i\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta,$$

dann werden durch $q^i, r_j, \tilde{a}^\alpha, \tilde{a}_\beta$ alle in den Impulsen linearen Schnitte in $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ erzeugt, und es gelten die Gleichungen

$$\{q^i, r_j\}_{\mathcal{R}} = \delta_j^i \quad \text{und} \quad \{\tilde{a}^\alpha, \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} = \delta_\beta^\alpha,$$

sowie

$$\begin{aligned} \{q^i, q^j\}_{\mathcal{R}} &= \{q^i, \tilde{a}^\alpha\}_{\mathcal{R}} = \{q^i, \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} = \{r_i, r_j\}_{\mathcal{R}} \\ &= \{r_i, \tilde{a}^\alpha\}_{\mathcal{R}} = \{r_i, \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} = \{\tilde{a}^\alpha, \tilde{a}^\beta\}_{\mathcal{R}} = \{\tilde{a}_\alpha, \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen. Zunächst ist

$$\{q^i, \tau^* \Gamma_{j\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} = 0$$

und damit

$$\{q^i, r_j\}_{\mathcal{R}} = \delta_j^i.$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \{p_i, -\tau^* \Gamma_{j\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial q^i}} (\tau^* \Gamma_{j\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta) \\ &= \tau^* \left(\frac{\partial \Gamma_{j\alpha}^\beta}{\partial q^i} - \Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta + \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta \right) \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta, \end{aligned}$$

und damit wegen der Superantisymmetrie

$$\{-\tau^* \Gamma_{i\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta, p_j\}_{\mathcal{R}} = -\tau^* \left(\frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^\beta}{\partial q^j} - \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta + \Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta \right) \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta.$$

Jetzt brauchen wir noch

$$\begin{aligned} \{\tau^* \Gamma_{i\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta, \tau^* \Gamma_{j\gamma}^\delta \tilde{a}^\gamma \wedge \tilde{a}_\delta\}_{\mathcal{R}} &= \tau^* (\Gamma_{i\alpha}^\beta \Gamma_{j\gamma}^\delta) (\delta_\beta^\gamma \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\delta - \delta_\delta^\alpha \tilde{a}^\gamma \wedge \tilde{a}_\beta) \\ &= \tau^* (\Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta - \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta) \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta, \end{aligned}$$

und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \{r_i, r_j\}_{\mathcal{R}} &= \{p_i, p_j\}_{\mathcal{R}} + \tau^* \left(\frac{\partial \Gamma_{j\alpha}^\beta}{\partial q^i} - \frac{\partial \Gamma_{i\alpha}^\beta}{\partial q^j} + \Gamma_{j\alpha}^\gamma \Gamma_{i\gamma}^\beta - \Gamma_{i\alpha}^\gamma \Gamma_{j\gamma}^\beta \right) \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta \\ &= \tau^* R_{\beta ij}^\alpha \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}^\beta + \tau^* R_{\alpha ij}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \{r_i, \tilde{a}_\gamma\}_{\mathcal{R}} &= \{p_i, \tilde{a}_\gamma\}_{\mathcal{R}} - \{\tau^* \Gamma_{i\alpha}^\beta \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}_\beta\}_{\mathcal{R}} \\ &= -\tau^* \Gamma_{i\gamma}^\beta \tilde{a}_\beta + \tau^* \Gamma_{i\gamma}^\beta \tilde{a}_\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

und genauso

$$\{r_i, \tilde{a}^\gamma\}_{\mathcal{R}} = 0.$$

□

Bemerkung 3.5.4. Man beachte, dass die r_i 's im Gegensatz zu den p_i 's keine Koordinaten auf T^*M mehr sind, da erstere im Allgemeinen Anteile in $\Gamma^\infty(\bigwedge^2 \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ habe.

3.6 Die Courant-Klammer als abgeleitete Klammer

Mit den Vorbereitungen im letzten Abschnitt sind wir jetzt in der Lage, die Courant-Klammer auf $L \oplus L^*$ mit Hilfe der Rothstein-Klammer als abgeleitete Klammer schreiben zu können. Im Gegensatz zu der Arbeit von Roytenberg [40] verwenden wir jedoch nicht die Theorie der Supermannigfaltigkeiten, sondern greifen ausschließlich auf Mittel aus der „konventionellen“ Differentialgeometrie zurück.

3.6.1 Die BRST-Ladung

Sei jetzt wieder $E = L \oplus L^*$ ein Courant-Algebroid mit Dirac-Struktur L . Koordinaten von M bezeichnen wir mit q^1, \dots, q^n und lokale Basisschnitte von L mit a_1, \dots, a_k sowie lokale Basisschnitte von L^* mit a^1, \dots, a^k . Weiter definieren wir die lokalen Funktionen

$$c_{\alpha\beta}^\gamma = \langle [a_\alpha, a_\beta]_c, a^\gamma \rangle$$

und

$$\bar{c}_\gamma^{\alpha\beta} = \langle [a^\alpha, a^\beta]_c, a_\gamma \rangle.$$

Sei $\tau : T^*M \rightarrow M$ wieder die Kotangentialprojektion. Um die Rothstein-Klammer auf der Algebra $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ bilden zu können, müssen wir noch einen Zusammenhang ∇ auf L wählen. Dies stellt jedoch kein Problem dar, da die für uns wichtigen Aussagen später unabhängig von dieser Wahl sein werden. Im Folgenden werden wir, um Schreibarbeit zu sparen, die auf M lokal definierten Funktionen wie $\Gamma_{i\alpha}^\beta$, $c_{\alpha\beta}^\gamma$ usw. und die entsprechenden auf T^*M zurückgezogene Funktion mit dem gleichen Symbol bezeichnen.

Sei T die Torsion auf L , also

$$T_{\alpha\beta}^\gamma = \rho(a_\alpha)^i \Gamma_{i\beta}^\gamma - \rho(a_\beta)^i \Gamma_{i\alpha}^\gamma - c_{\alpha\beta}^\gamma$$

und \bar{T} die Torsion auf L^* ,

$$\bar{T}_\gamma^{\alpha\beta} = \rho(a^\beta)^i \Gamma_{i\gamma}^\alpha - \rho(a^\alpha)^i \Gamma_{i\gamma}^\beta - \bar{c}_\gamma^{\alpha\beta}$$

Weiter bezeichnen wir mit $\mathcal{J} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ die Abbildung, die einem Vektorfeld die dadurch gegebene lineare Funktion auf T^*M zuordnet, also $\mathcal{J}(X)(\alpha) = \langle X|_m, \alpha \rangle = \alpha(X_m)$ für $\alpha \in T^*M|_m$.

Satz 3.6.1. *Durch die Definitionen*

$$\begin{aligned} \mu &= -\mathcal{J}(\rho(a_\alpha))\tilde{a}^\alpha + \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}^\beta \wedge \tilde{a}_\gamma \\ &= -r_i \rho(a_\alpha)^i \tilde{a}^\alpha - \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}^\gamma \tilde{a}^\alpha \wedge \tilde{a}^\beta \wedge \tilde{a}_\gamma \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma &= -\mathcal{J}(\rho(a^\alpha))\tilde{a}_\alpha + \frac{1}{2}\bar{T}_\gamma^{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}_\beta \wedge \tilde{a}^\gamma \\ &= -r_i \rho(a^\alpha)^i \tilde{a}_\alpha - \frac{1}{2}\bar{c}_\gamma^{\alpha\beta} \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}_\beta \wedge \tilde{a}^\gamma \end{aligned}$$

sind zwei globale Schnitte in $\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*)$ gegeben. Weiter sei

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -\langle [\alpha_1, \alpha_2]_c, \alpha_3 \rangle,$$

wobei wir ψ als Schnitt in $\bigwedge^3 \tau^\sharp(L \oplus L^*)$ auffassen. Lokal ist ψ also von der Form

$$\psi = \psi^{\alpha\beta\gamma} \tilde{a}_\alpha \wedge \tilde{a}_\beta \wedge \tilde{a}_\gamma.$$

i.) Für alle $s_1, s_2 \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L)$ gilt

$$\{\{\tilde{s}_1, \mu\}_\mathcal{R}, \tilde{s}_2\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp[s_1, s_2],$$

und für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L^*)$ ist

$$\{\mu, \tilde{\alpha}\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp d_L \alpha.$$

ii.) Für alle $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L^*)$ gilt

$$\{\{\tilde{\alpha}, \gamma\}_\mathcal{R}, \tilde{\beta}\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp[\alpha, \beta]_*,$$

und für alle $s_1 \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L)$ ist

$$\{\gamma, \tilde{s}_1\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp d_{L^*} s_1.$$

iii.) Sei $\Theta = \mu + \gamma + \psi$. Dann gilt für alle $e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E)$

$$\{\{\tilde{e}_1, \Theta\}_\mathcal{R}, \tilde{e}_2\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp[e_1, e_2]_c$$

sowie für $f \in C^\infty(M)$

$$\{\Theta, \tau^* f\}_\mathcal{R} = \tau^\sharp \mathcal{D}f,$$

beziehungsweise

$$\{\{e_1, \Theta\}_\mathcal{R}, \tau^* f\}_\mathcal{R} = \tau^*(\rho(e_1)f).$$

Beweis. Zunächst rechnet man nach, dass die beiden für μ angegebenen Ausdrücke tatsächlich übereinstimmen. Mit dem Transformationsverhalten für die Torsion $T_{\alpha\beta}^\gamma$ folgt weiter, dass μ als globaler Schnitt wohldefiniert ist. Für γ gelten natürlich die analogen Aussagen.

i.) Wenn wir in unseren Super-Darbouxkoordinaten rechnen, erhalten wir leicht folgende Gleichungen, wobei $f, g \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \{\tau^* f, \tau^* g\}_\mathcal{R} &= 0, \\ \{\{\tilde{a}_\nu, \mu\}_\mathcal{R}, \tilde{a}_\kappa\}_\mathcal{R} &= c_{\nu\kappa}^\gamma \tilde{a}_\gamma = \tau^\sharp[a_\nu, a_\kappa], \\ \{\{\tilde{a}_\nu, \mu\}_\mathcal{R}, \tau^* f\}_\mathcal{R} &= \tau^*(\rho(\tilde{a}_\nu)f) = \tau^*[a_\nu, f]. \end{aligned}$$

Damit sieht man, dass für $s_1 \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k L)$, $s_2 \in \Gamma^\infty(\bigwedge^l L)$ durch

$$[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]_\mu = \{\{\tilde{s}_1, \mu\}_\mathcal{R}, \tilde{s}_2\}_\mathcal{R}$$

eine Abbildung

$$[\cdot, \cdot]_\mu : \tau^\sharp(\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L)) \times \tau^\sharp(\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet L)) \rightarrow \tau^\sharp(\Gamma^\infty \bigwedge^\bullet L)$$

definiert ist. Weiter gilt $\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2\}_{\mathcal{R}} = 0$, und mit der Jacobi-Identität für die Rothstein-Klammer folgt

$$\{\{\tilde{s}_1, \mu\}_{\mathcal{R}}, \tilde{s}_2\}_{\mathcal{R}} = -(-1)^{(k-1)(l-1)} \{\{\tilde{s}_2, \mu\}_{\mathcal{R}}, \tilde{s}_1\}_{\mathcal{R}},$$

also die Superantisymmetrie für $[\cdot, \cdot]_{\mu}$. Mit Hilfe der Leibniz-Regel folgt jetzt

$$[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]_{\mu} = \tau^{\sharp}[s_1, s_2]$$

für alle $s_1, s_2 \in \Gamma^{\infty}(\bigwedge^{\bullet} L)$ und damit der erste Teil von *i.*)

Weiter rechnen wir leicht nach, dass

$$\{\mu, \tau^* f\}_{\mathcal{R}} = \rho(a_{\alpha}) f \tilde{a}^{\alpha} = \tau^{\sharp}(\mathrm{d}_L f)$$

sowie

$$\{\mu, \tilde{a}^{\alpha}\}_{\mathcal{R}} = -\frac{1}{2} c_{\beta\gamma}^{\alpha} \tilde{a}^{\beta} \wedge \tilde{a}^{\gamma} = \tau^{\sharp} \mathrm{d}_L a^{\alpha}$$

womit *i.*) gezeigt ist.

ii.) Analog zu *i.*)

iii.) Seien $s_1, s_2 \in \Gamma^{\infty}(\bigwedge^k L)$ und $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma^{\infty}(\bigwedge^l L^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}_{\nu}, \tilde{\eta}_1\}_{\mathcal{R}} &= \tau^{\sharp}(i(a_{\nu})\eta_1) & \{\tilde{\eta}_1, \tilde{a}_{\nu}\}_{\mathcal{R}} &= \tau^{\sharp}(j(a_{\nu})\eta_1) = -(-1)^l \tau^{\sharp}(i(a_{\nu})\eta_1) \\ \{\tilde{a}^{\nu}, \tilde{s}_1\}_{\mathcal{R}} &= \tau^{\sharp}(i(a^{\nu})s_1) & \{\tilde{s}_1, \tilde{a}^{\nu}\}_{\mathcal{R}} &= \tau^{\sharp}(j(a^{\nu})s_1) = -(-1)^k \tau^{\sharp}(i(a^{\nu})s_1) \end{aligned}$$

Damit folgt insbesondere

$$\{\{\tilde{\eta}_1, \psi\}_{\mathcal{R}}, \tilde{\eta}_2\}_{\mathcal{R}} = \tau^{\sharp}[\eta_1, \eta_2]_L.$$

Mit dieser Vorbereitung kann die Behauptung jetzt leicht nachgerechnet werden, z.B. gilt

$$\begin{aligned} \{\{\tilde{s}_1, \mu\}_{\mathcal{R}}, \tilde{\eta}_2\}_{\mathcal{R}} &= \{\mu, \{\tilde{s}_1, \tilde{\eta}_2\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} + \{\tilde{s}_1, \{\mu, \tilde{\eta}_2\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} \\ &= \tau^{\sharp}(\mathrm{d}_L i_{s_1} \eta_2 + i_{s_1} \mathrm{d}_L \eta_2) = \tau^{\sharp} \mathcal{L}_{s_1} \eta_2 \end{aligned}$$

sowie

$$\{\{\eta_1, \mu\}_{\mathcal{R}}, \tilde{s}_2\}_{\mathcal{R}} = \{\tau^{\sharp} \mathrm{d}_L \tilde{\eta}_1, \tilde{s}_2\}_{\mathcal{R}} = -\tau^{\sharp}(i_{s_2} \mathrm{d}_L \eta_1).$$

Rechnet man die restlichen Terme in

$$\{\{\tilde{s}_1 + \tilde{\eta}_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, \tilde{s}_2 + \tilde{\eta}_2\}_{\mathcal{R}}$$

auf ähnliche Weise aus, erhält man insgesamt die in Satz 3.4.3 angegebene Gleichung für die Courant-Klammer. Außerdem gilt

$$\{\Theta, \tau^* f\}_{\mathcal{R}} = \tau^{\sharp}(\mathrm{d}_L f + \mathrm{d}_L^* f) = \tau^{\sharp} \mathcal{D} f,$$

bzw. mit $e \in \Gamma^{\infty}(L \oplus L^*)$

$$\{\{\Theta, \tilde{e}\}_{\mathcal{R}}, f\}_{\mathcal{R}} = \{\Theta, \{\tilde{e}, f\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} + \{\tilde{e}, \{\Theta, f\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} = \tau^*(\rho(e)f).$$

□

Bemerkungen 3.6.2. i.) In Analogie zur BRST-Quantisierung nennen wir Θ auch BRST-Ladung, vgl. z.B. [7, 6, 17].

ii.) Weiter beachte man die formale Übereinstimmung unserer Ausdrücke für μ und γ , notiert mit Hilfe der Super-Darbouxkoordinaten, mit den in [40] angegebenen Ausdrücken.

Da die Abbildungen τ^* bzw. τ^\sharp injektiv sind, können wir Elemente in $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet(L \oplus L^*))$ mit ihren Bildern in $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ identifizieren. Wir werden deshalb beispielsweise für $\tilde{s} = \tau^\sharp s$ im folgenden einfach wieder s schreiben. Da μ und γ die einzigen Elemente in $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ sind, die nicht im Bild von τ^\sharp liegen und wir im weiteren betrachten werden, sollte dadurch keine Verwirrung entstehen.

Proposition 3.6.3. *Für das oben definierte Θ gilt $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}} = 0$, oder äquivalent dazu*

$$\begin{aligned} \{\mu, \mu\}_{\mathcal{R}} &= 0 \\ \frac{1}{2}\{\gamma, \gamma\}_{\mathcal{R}} + \{\mu, \psi\}_{\mathcal{R}} &= 0 \\ \{\mu, \gamma\}_{\mathcal{R}} &= 0 \\ \{\gamma, \psi\}_{\mathcal{R}} &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma^\infty(E)$ und $f, g \in C^\infty(M)$. Mit der Jacobi-Identität für die Rothstein-Klammer rechnen wir zunächst, dass

$$\begin{aligned} \tau^\sharp([e_1, e_2]_c, e_3)_c &= \{\{\{\{e_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}} \\ &= \{\{\{\{e_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, \{e_2, \Theta\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}} - \{\{\{\{e_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}} \\ &= \{\{\{\{e_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}}, \{e_2, \Theta\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} + \{\{\{e_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, \{\{e_2, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_1\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}} \\ &= \tau^\sharp([e_1, e_3]_c, e_2)_c + [e_1, [e_2, e_3]_c]_c + \frac{1}{2}\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_1\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Jacobi-Identität für die Courant-Klammer gilt damit die Gleichung

$$\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_1\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, e_3\}_{\mathcal{R}} = 0.$$

Die Aussage $\rho([e_1, e_2]_c) = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$ übersetzt sich auf ähnliche Weise zu

$$\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, e_1\}_{\mathcal{R}}, e_2\}_{\mathcal{R}}, f\}_{\mathcal{R}} = 0,$$

und schließlich liefert $\langle \mathcal{D}f, \mathcal{D}g \rangle = 0$ mit

$$\begin{aligned} \tau^\sharp \langle \mathcal{D}f, \mathcal{D}g \rangle &= \{\{\Theta, f\}_{\mathcal{R}}, \{\Theta, g\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} \\ &= \{\{\{\{\Theta, f\}_{\mathcal{R}}, \Theta\}_{\mathcal{R}}, g\}_{\mathcal{R}} - \{\Theta, \{\{\Theta, f\}_{\mathcal{R}}, g\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{2}\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, f\}_{\mathcal{R}}, g\}_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\{\{\{\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}, f\}_{\mathcal{R}}, g\}_{\mathcal{R}} = 0.$$

Wenn wir uns jetzt aber die Definition von μ , γ und ψ genau anschauen, dann erkennt man, dass $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}$ nur Terme der folgenden Form enthält:

1. Zurückgezogenen Schnitte in $\bigwedge^4 \tau^\sharp(E \oplus E^*)$.
2. Produkte von einem r_i mit einem zurückgezogenen Schnitt in $\bigwedge^2 \tau^\sharp(E \oplus E^*)$.
3. Produkte von $r_i r_j$ mit einer zurückgezogenen Funktion.

Durch die Gültigkeit der obigen Gleichungen für beliebige Schnitte in E und Funktionen auf M kann man folgern, dass keine der drei genannten Typen in $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}}$ vorkommen kann und somit $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}} = 0$ sein muss. Die Gleichungen für μ , γ und ψ ergeben sich durch Sortieren nach dem Grad, wobei wir z.B. den Geistgrad gh verwenden können, der für ein Element in $\phi \in \Gamma^\infty(\tau^*(\bigwedge^k E \otimes \bigwedge^l)) \subset \Gamma^\infty(\bigwedge^{k+l} \tau^\sharp(E \oplus E^*))$ durch $\text{gh } \phi = (l - k)\phi$ gegeben ist. Da gh eine Derivation der Rothstein-Klammer ist [17], kann damit die Behauptung gefolgert werden. \square

Bemerkung 3.6.4. Die Gleichung $\{\mu, \mu\}_{\mathcal{R}} = 0$ ist die Jacobi-Identität für die Klammer auf L , wohingegen $\frac{1}{2}\{\gamma, \gamma\}_{\mathcal{R}} + \{\mu, \psi\}_{\mathcal{R}} = 0$ die zweite Gleichung in Lemma 3.4.1 liefert. $\{\mu, \gamma\}_{\mathcal{R}} = 0$ bedeutet die Verträglichkeit von d_L mit der Klammer $[\cdot, \cdot]_*$, und $\{\gamma, \psi\}_{\mathcal{R}} = 0$ ist die dritte Gleichung von Lemma 3.4.1. Wir erhalten jetzt also auf einfache Weise die Ergebnisse wieder, die wir zuvor mühsam nachgerechnet hatten.

3.6.2 Proto-Bialgebroid

Wir haben gesehen, wie wir einer Courant-Algebroid-Struktur auf $L \oplus L^*$ ein Element $\Theta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ mit $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}} = 0$ zuordnen können, so dass sich die Courant-Klammer mit Hilfe von Θ und der Rothstein-Klammer als abgeleitete Klammer schreiben lässt. Umgekehrt kann man auch durch die Vorgabe eines geeigneten $\Theta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ mit $\{\Theta, \Theta\}_{\mathcal{R}} = 0$ das Bündel $L \oplus L^*$ zu einem Courant-Algebroid machen. Dabei muss Θ so gewählt werden, dass die Ausdrücke

$$\{\{\tilde{e}_1, \Theta\}_{\mathcal{R}}, \tilde{e}_2\}_{\mathcal{R}}$$

sowie

$$\{\Theta, \tau^* f\}_{\mathcal{R}}$$

für zwei zurückgezogene Schnitte \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 sowie eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ wieder einen zurückgezogenen Schnitt von $L \oplus L^*$ definieren, also in $\tau^\sharp(\Gamma^\infty(L \oplus L^*))$ liegen. Damit dürfen die beiden oben genannten Ausdrücke nicht von den Impulsen p abhängen, und mit einem Blick auf die in Lemma 3.5.2 angegebene Form der Rothstein-Klammer folgt, dass Θ höchstens quadratisch in den Impulsen p sein darf. Um die erste Bedingung weiter zu untersuchen, bezeichnen wir mit \mathcal{P} die in den Impulsen p polynomialen Elemente aus $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ und definieren durch

$$\epsilon = p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \tilde{a}_\alpha \wedge i(\tilde{a}^\alpha)$$

und

$$\lambda = p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \tilde{a}^\alpha \wedge i(\tilde{a}_\alpha)$$

eine Bigradierung auf \mathcal{P} . Ein Element $\Psi \in \mathcal{P}$ hat den Bigrad (k, ℓ) , wenn die Gleichungen $\epsilon \Psi = k \Psi$ und $\lambda \Psi = \ell \Psi$ erfüllt sind. Wir schreiben dann $\Psi \in \mathcal{P}^{k, \ell}$. Weiter sei der Totalgrad durch die Summe

$$\chi = \epsilon + \lambda$$

gegeben.

Betrachtet man wieder die Formel für die Rothstein-Klammer, so erkennt man, dass für $\Phi, \Psi \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ mit $\chi(\Phi) = k\Phi$ und $\chi(\Psi) = \ell\Psi$ die Gleichung

$$\chi(\{\Phi, \Psi\}_\mathcal{R}) = (k + \ell - 2)\{\Phi, \Psi\}_\mathcal{R}$$

folgt, d.h. die Rothstein-Klammer ist vom Grad -2 für die χ -Gradierung. Es gilt nun der folgende

Satz 3.6.5. *Sei $\Theta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet \tau^\sharp(L \oplus L^*))$ vom χ -Grad drei, d.h. es gilt $\chi(\Theta) = 3\Theta$. Dann ist durch*

$$\tau^\sharp[e_1, e_2]_\Theta = \{\{\tilde{e}_1, \Theta\}_\mathcal{R}, \tilde{e}_2\}_\mathcal{R}$$

eine Klammer auf $\Gamma^\infty(L \oplus L^)$ und durch*

$$\tau^\sharp(\rho(e_1)f) = \{\{\tilde{e}_1, \Theta\}_\mathcal{R}, \tau^*f\}_\mathcal{R}$$

ein Vektorbündelhomomorphismus $\rho : L \oplus L^ \rightarrow TM$ definiert. Ist außerdem $\{\Theta, \Theta\}_\mathcal{R} = 0$, so wird $L \oplus L^*$ durch diese Konstruktion zusammen mit der kanonischen symmetrischen Bilinearform zu einem Courant-Algebroid.*

Die zweite Aussage folgt dabei mit Rechnungen wie beim Beweis zu Lemma 3.6.3. Man vergleiche auch die entsprechenden Rechnungen mit Hilfe von Supermannigfaltigkeiten in [40, 29] sowie allgemeine Betrachtungen zu abgeleiteten Klammern in [28].

Ein Element Θ mit Totalgrad drei ist von der Form

$$\Theta = \phi + \mu + \gamma + \psi$$

mit $\phi \in \mathcal{P}^{0,3} \cong \Gamma^\infty(\bigwedge^3 L^*)$, $\mu \in \mathcal{P}^{1,2}$, $\gamma \in \mathcal{P}^{2,1}$ und $\psi \in \mathcal{P}^{3,0} \cong \Gamma^\infty(\bigwedge^3 L^*)$. Durch Sortieren nach den Graden erhält man das folgende, zu $\{\Theta, \Theta\}_\mathcal{R} = 0$ äquivalente, System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\mu, \mu\}_\mathcal{R} + \{\gamma, \phi\}_\mathcal{R} &= 0 \\ \frac{1}{2}\{\gamma, \gamma\}_\mathcal{R} + \{\mu, \psi\}_\mathcal{R} &= 0 \\ \{\mu, \gamma\}_\mathcal{R} + \{\phi, \psi\}_\mathcal{R} &= 0 \\ \{\mu, \phi\}_\mathcal{R} &= 0 \\ \{\gamma, \psi\}_\mathcal{R} &= 0. \end{aligned}$$

Wie in Satz 3.6.1 können wir durch μ und γ abgeleitete Klammern auf L bzw. L^* sowie die entsprechenden Anker definieren. Die Jacobi-Identität auf L ist dann äquivalent zu $\phi = 0$. In diesem Fall wird (L, L^*) zu einem Lie-quasi-Bialgebroid, wie in dem von uns bisher betrachteten Fall. Analog folgt die Jacobi-Identität auf L^* genau dann, wenn $\psi = 0$ gilt, und (L, L^*) ist dann ein Quasi-Lie-Bialgebroid. Im allgemeinen Fall, wenn also weder auf L noch auf L^* die Jacobi-Identität zu gelten braucht, nennt man (L, L^*) Proto-Bialgebroid, vgl. [29].

Bemerkung 3.6.6. Die glatte Deformation einer Dirac-Struktur L kann nach Lemma 3.2.7 als triviale Deformation der Courant-Algebroidstruktur aufgefasst werden, so dass L auch für das deformierte Algebroid eine Dirac-Struktur bleibt. Dies übersetzt sich zu einer trivialen Deformation Θ_t von $\Theta = \mu + \gamma + \psi$, so dass der $\mathcal{P}^{0,3}$ -Anteil von Θ_t für alle t Null ist. Das kann man auch auffassen als die Deformation des Lie-quasi-Algebroids (L, L^*) derart, dass die auf $L \oplus L^*$ definierten Courant-Algebroidstrukturen isomorph sind. Dies ist der Ausgangspunkt der Betrachtungen in [42], was auf die gleiche Bedingung führt, die wir in Satz 3.7.3 erhalten werden, nur formuliert in der Sprache der Supermannigfaltigkeiten.

3.7 Obstruktion für die Fortsetzbarkeit von Deformationen

Der Hauptgrund für die Einführung der Rothstein-Klammer ist, dass wir jetzt auch den kubischen Term in der Bedingung für die Deformation aus Lemma 3.3.9 systematisch behandeln können.

Lemma 3.7.1. *Seien $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$ und $s_1, s_2, s_3 \in \Gamma^\infty(L)$. Dann gilt*

$$\{s_3, \{s_2, \{s_1, \{\{\{\psi, \omega_1\}_{\mathcal{R}}, \omega_2\}_{\mathcal{R}}, \omega_3\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}}\}_{\mathcal{R}} = - \sum_{\pi \in \mathcal{S}_3} \psi(\omega_1(s_{\pi(1)}), \omega_2(s_{\pi(2)}), \omega_3(s_{\pi(3)}))$$

Insbesondere ist also

$$\frac{1}{6} \{\{\{\psi, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}} = - \wedge^3 \omega \psi = T_\omega,$$

wobei $T_\omega(s_1, s_2, s_3) = \langle [\omega(s_1), \omega(s_2)]_{\mathcal{C}}, \omega(s_3) \rangle$ gilt.

Beweis. Die Behauptung rechnet man mit Hilfe der Jacobi-Identität nach, wobei man beachtet, dass Terme der Form

$$\{\{\{\psi, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega_1(s_1, s_2)\}_{\mathcal{R}}$$

usw. verschwinden. □

Um Schreibarbeit zu sparen, formulieren wir folgendes

Lemma 3.7.2. *Durch die Forderung*

$$\tau^\sharp[\eta_1, \eta_2, \eta_3]_\psi = \{\{\{\psi, \eta_1\}_{\mathcal{R}}, \eta_2\}_{\mathcal{R}}, \eta_3\}_{\mathcal{R}}$$

ist eine super-antisymmetrische Abbildung

$$[\cdot, \cdot, \cdot]_\psi : \Gamma^\infty(\wedge^k L^*) \times \Gamma^\infty(\wedge^\ell L^*) \times \Gamma^\infty(\wedge^m L^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\wedge^{k+\ell+m-3} L^*)$$

definiert.

Beweis. Da ψ ein zurückgezogener Schnitt ist und damit auch die rechte Seite der Definitionsgleichung einen zurückgezogenen Schnitt ergibt, folgt zusammen mit der Injektivität von τ^\sharp , dass $[\cdot, \cdot, \cdot]_\psi$ wohldefiniert ist. Die Antisymmetrie erhält man aus der Super-Jacobi-Identität für die Rothstein-Klammer, wobei man beachtet, dass Terme der Form $\{\eta_1, \eta_2\}_{\mathcal{R}}$ usw. verschwinden. Die Aussage über die Grade folgt, da ψ den Totalgrad 3 und die Rothstein-Klammer den den Grad -2 hat. □

Mit dieser Definition ist jetzt also $T_\omega = \frac{1}{6}[\omega, \omega, \omega]_\psi$. Damit haben wir folgende Umformulierung von Satz 3.3.9.

Satz 3.7.3. *Sei E ein Courant-Algebroid mit Dirac-Struktur L und sei L' ein isotropes Komplement zu L . Identifizieren wir E mit $L \oplus L^*$, dann ist $\text{graph}(\omega)$ für eine Zweiform ω auf L genau dann eine Dirac-Struktur, wenn die Gleichung*

$$\{\mu, \omega\}_{\mathcal{R}} + \frac{1}{2} \{\{\omega, \gamma\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}} + \frac{1}{6} \{\{\{\psi, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}}, \omega\}_{\mathcal{R}} = 0,$$

beziehungsweise die äquivalente Gleichung

$$d_L \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_* + \frac{1}{6}[\omega, \omega, \omega]_\psi = 0$$

erfüllt ist.

Lemma 3.7.4. *Sei für ein $\omega \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$ durch*

$$\begin{aligned} d_\omega &= \{\mu, \cdot\}_\mathcal{R} + \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \cdot\}_\mathcal{R} + \frac{1}{2}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \cdot\}_\mathcal{R} \\ &= d_L + [\omega, \cdot]_* + \frac{1}{2}[\omega, \omega, \cdot]_\psi \end{aligned}$$

eine Abbildung $d_\omega : \Gamma^\infty(\wedge^\bullet L^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\wedge^\bullet L^*)$ definiert. Dann ist d_ω eine Superderivation bezüglich des Dachprodukts vom Grad eins, und es gilt die Identität

$$d_\omega \left(\{\mu, \omega\}_\mathcal{R} + \frac{1}{2}\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} + \frac{1}{6}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} \right) = 0$$

bzw.

$$d_\omega \left(d_L \omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_* + \frac{1}{6}[\omega, \omega, \omega]_\psi \right) = 0.$$

Beweis. Das durch d_ω eine Superderivation vom Grad eins gegeben ist, folgt leicht aus den Eigenschaften der Rothstein-Klammer. Die zu zeigende Gleichung schreiben wir zunächst einmal aus, wobei wir bereits die Identität $\{\mu, \psi\}_\mathcal{R} + \frac{1}{2}\{\gamma, \gamma\}_\mathcal{R} = 0$ verwenden.

$$\begin{aligned} & d_\omega \left(\{\mu, \omega\}_\mathcal{R} + \frac{1}{2}\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} + \frac{1}{6}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} \right) \\ &= \{\{\{\mu, \omega\}_\mathcal{R}, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} - \frac{1}{2}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\mu, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} \\ &\quad - \frac{1}{12}\{\{\{\{\gamma, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} + \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \{\mu, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} + \frac{1}{6}\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} \\ &\quad + \frac{1}{2}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\mu, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} + \frac{1}{4}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} \\ &\quad + \frac{1}{12}\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich jetzt mit den folgenden Gleichungen, die man mit Hilfe der Super-Jacobi-Identität nachrechnet.

- i.) $\{\{\{\mu, \omega\}_\mathcal{R}, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} = -\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \{\mu, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R}$
- ii.) $\{\{\{\{\gamma, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R} = 6\{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R}$
- iii.) $0 = \{\{\{\{\{\gamma, \psi\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}$
 $= 6\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R} + 4\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\{\omega, \gamma\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R}$
- iv.) $0 = \{\{\{\{\{\psi, \psi\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}$
 $= 20\{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \{\{\{\psi, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}, \omega\}_\mathcal{R}\}_\mathcal{R}$

□

Mit diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Obstruktion für die Fortsetzbarkeit von Deformationen bestimmen. Der folgende Satz liefert das zentrale Ergebnis dieser Arbeit.

Satz 3.7.5. *Sei $E = L \oplus L^*$ ein Courant-Algebroid mit Dirac-Struktur L und sei durch $\omega_t = t\omega_1 + t^2\omega_2 + \dots + t^N\omega_N \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)[[t]]$ eine formale Deformation von L der Ordnung N gegeben, d.h. die Gleichung*

$$d_L\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]_* + \frac{1}{6}[\omega_t, \omega_t, \omega_t]_\psi = 0$$

ist bis zur Ordnung N erfüllt. Dann ist

$$R_{N+1} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\omega_i, \omega_{N+1-i}]_* - \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=N+1} [\omega_i, \omega_j, \omega_k]_\psi$$

geschlossen bezüglich d_L , und die Deformation ω_t lässt sich genau dann bis zur Ordnung $N+1$ fortsetzen, wenn R_{N+1} exakt ist. Die Obstruktion für die Fortsetzbarkeit einer Deformation liegt also in der dritten Lie-Algebroidkohomologie der Dirac-Struktur L .

Beweis. Sei $\omega_{N+1} \in \Gamma^\infty(\wedge^2 L^*)$ und $\omega'_t = \omega_t + t^{N+1}\omega_{N+1}$. Wir rechnen zunächst die $(N+1)$ -te Ordnung der Deformationsbedingung aus.

$$\begin{aligned} & d_L\omega'_t + \frac{1}{2}[\omega'_t, \omega'_t]_* + \frac{1}{6}[\omega'_t, \omega'_t, \omega'_t]_\psi \\ &= t^{N+1} \left(d_L\omega_{N+1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\omega_i, \omega_{N+1-i}]_* + \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=N+1} [\omega_i, \omega_j, \omega_k]_\psi \right) + t^{N+2} \dots \end{aligned}$$

Wir können die Deformation also genau dann fortsetzen, wenn wir ein ω_{N+1} mit

$$d_L\omega_{N+1} = R_{N+1}$$

finden. Dass R_{N+1} geschlossen ist, ergibt sich mit Lemma 3.7.4 durch Anwenden von $d_{\omega'_t}$ auf die Deformationsgleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= d_{\omega'_t} \left(d_L\omega'_t + \frac{1}{2}[\omega'_t, \omega'_t]_* + \frac{1}{6}[\omega'_t, \omega'_t, \omega'_t]_\psi \right) \\ &= t^{N+1} d_L \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l [\omega_i, \omega_{N+1-i}]_* + \frac{1}{6} \sum_{i+j+k=N+1} [\omega_i, \omega_j, \omega_k]_\psi \right) + t^{N+2} \dots \end{aligned}$$

Da der Ausdruck in jeder Ordnung von t einzeln Null sein muss, folgt damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.7.6. Wir erhalten damit also die bekannten Ergebnisse aus der Deformationstheorie von Poisson-Tensoren oder präsymplektischen Formen wieder, vgl. die Abschnitte 3.3.4 und 3.3.5. Weiter sehen wir, dass die Obstruktion für die Fortsetzbarkeit, die ja durch die dritte Lie-Algebroidkohomologie von L gegeben ist, unabhängig von der Wahl des zu L komplementären Bündels L' und des Zusammenhangs auf L ist. Schließlich sei noch erwähnt, dass die Klassifikation der Äquivalenz von Deformationen in diesem Fall im Allgemeinen nicht durch die zweite Lie-Algebroidkohomologie von L gegeben ist, vgl. auch die Folgerungen 2.1.3 und 2.3.13. Zwar ist das für Poisson-Mannigfaltigkeiten noch richtig, für präsymplektischen Mannigfaltigkeiten haben wir jedoch in Abschnitt 3.3.4 gesehen, dass das Verschwinden der zweiten deRham-Kohomologie für die Starrheit noch nicht hinreichend ist.

A Lie-Algebroiden, Lie-Bialgebroiden und die Schouten-Nijenhuis-Klammer

Wir wollen hier einige Definitionen und grundlegende Aussagen zu Lie-Algebroiden und verwandten Themen aufführen. Für ausführlichere Darstellungen siehe z.B. [35, 10].

Definition A.1 ([10]). Ein Lie-Algebroid ist ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ über einer Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Lieklammer $[\cdot, \cdot]$ auf den Schnitten $\Gamma^\infty(E)$ von E , sowie einem Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \rightarrow TM$, genannt Anker, so dass folgende Leibnizregel gilt:

$$[e_1, f e_2] = f[e_1, e_2] + (\rho(e_1)f) e_2 \quad \text{für alle } e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E), f \in C^\infty(M).$$

Bemerkung A.2. Man kann zeigen [30], dass für jedes Lie-Algebroid der Anker ein Liealgebrenhomomorphismus $\rho : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \mathfrak{X}(M) = \Gamma^\infty(TM)$ ist,

$$\rho([e_1, e_2]) = [\rho(e_1), \rho(e_2)] \quad \text{für alle } e_1, e_2 \in \Gamma^\infty(E).$$

Beispiele A.3. *i.)* Das Standardbeispiel für ein Lie-Algebroid ist das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M mit der Lie-Klammer von Vektorfeldern und der Identität als Anker. Ebenso wird jedes integrable Unterbündel von TM ein Lie-Algebroid.

ii.) Ist der Anker $\rho = 0$, dann ist E ein Bündel von Lie-Algebren. Insbesondere ist jede Lie-Algebra \mathfrak{g} mit dem Anker $\rho = 0$ ein Lie-Algebroid über einem Punkt.

Definition A.4. Sei E ein Lie-Algebroid. Dann definieren wir die Abbildung

$$d_E : \Gamma^\infty(\bigwedge^k E^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\bigwedge^{k+1} E)$$

durch die Forderungen

$$d_E f(e_1) = \rho(e_1)f$$

und

$$\begin{aligned} d_E \omega(e_1, \dots, e_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \rho(e_i) \omega(e_1, \overset{i}{\wedge} \dots, e_{k+1}) \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([e_i, e_j], e_1, \overset{i}{\wedge} \dots \overset{j}{\wedge} \dots, e_{k+1}) \end{aligned}$$

für alle $f \in C^\infty(M)$ und $e_1, \dots, e_{k+1} \in \Gamma^\infty(E)$. Wir nennen d_E das Lie-Algebroiddifferential von E .

Man überzeugt sich leicht davon, dass d_E eine Superderivation bezüglich des Dachprodukts ist. Für den Fall $E = TM$ ist d_E das gewöhnliche deRahm-Differential, und es gilt dann $d_E^2 = 0$. Mit Hilfe der Jacobi-Identität für $[\cdot, \cdot]$ lässt sich diese Aussage jedoch auch allgemeiner zeigen.

Lemma A.5. Für das Lie-Algebroiddifferential d_E gilt $d_E^2 = 0$.

Wir können aber auch umgekehrt vorgehen und mit Hilfe eines Differentials auf der Grassmannalgebra $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E^*)$ das Vektorbündel E zu einem Lie-Algebroid machen.

Satz A.6. Sei E ein Vektorbündel und

$$d_E : \Gamma^\infty(\bigwedge^k E^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\bigwedge^{k+1} E)$$

eine Superderivation von Grad eins. Dann ist durch die Definitionen

$$\rho(e)f = d_E f(e) \quad \forall f \in C^\infty(M),$$

$$\alpha([e_1, e_2]) = \rho(e_1)(\alpha(e_2)) - \rho(e_2)(\alpha(e_1)) - d_E \alpha(e_1, e_2) \quad \forall \alpha \in \Gamma^\infty(L^*)$$

eine \mathbb{R} -bilineare, antisymmetrische Verknüpfung auf $\Gamma^\infty(E)$ gegeben, die die Leibniz-Regel

$$[e_1, f e_2] = f[e_1, e_2] + \rho(e_1)f e_2$$

erfüllt. Genau dann erfüllt $[\cdot, \cdot]$ die Jacobi-Identität und $(E, [\cdot, \cdot], \rho)$ ist ein Lie-Algebroid, wenn $d_E^2 = 0$ gilt.

Die Lieklammer auf den Schnitten $\Gamma^\infty(E)$ kann mit Hilfe des Ankers zu einer Super-Lieklammer auf ganz $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E)$ erweitert werden.

Definition A.7. Sei $(E, [\cdot, \cdot], \rho)$ ein Lie-Algebroid und sei $P \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k E)$.

i.) Die Superderivation

$$i_P : \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet-k} E)$$

ist durch die Forderungen

$$i_f \omega = f \omega \quad \text{für } f \in C^\infty(M)$$

und

$$i_{e_1 \wedge \dots \wedge e_k} = i_{e_1} \dots i_{e_k}$$

für $e_1, \dots, e_k \in \Gamma^\infty(E)$ definiert.

ii.) Die Lieableitung

$$\mathcal{L}_P : \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E^*) \rightarrow \Gamma^\infty(\bigwedge^{\bullet-k+1} E^*)$$

ist durch

$$\mathcal{L}_P = [i_P, d_E] = i_P d_E - (-1)^k d_E i_P$$

gegeben.

Definition A.8. Durch die Forderung

$$i_{[P, Q]} = [\mathcal{L}_P, i_Q] = \mathcal{L}_P i_Q - (-1)^{(k-1)(\ell-1)} i_Q \mathcal{L}_P$$

für $P \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k E)$ und $Q \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\ell E)$ wird die Lie-Algebroidklammer auf ganz $\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E)$ fortgesetzt. Diese so erhaltene Klammer heißt Schouten-Nijenhuis-Klammer oder auch kurz Schouten-Klammer. Zur Wohldefiniertheit dieser Abbildung siehe z.B. [35].

Satz A.9. *Die Algebra $(\Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E), [\cdot, \cdot], \wedge)$ ist eine Gerstenhaber-Algebra, das heißt für $P \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k E)$, $Q \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\ell E)$ und $R \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet E)$ gilt die Super-Antisymmetrie*

$$[P, Q] = -(-1)^{(k-1)(\ell-1)}[Q, P],$$

die Super-Jacobi-Identität

$$[P, [Q, R]] = [[P, Q], R] + (-1)^{(k-1)(\ell-1)}[Q, [P, R]]$$

sowie die Super-Leibniz-Regel

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(k-1)\ell} Q \wedge [P, R].$$

Insbesondere wird mit der Schouten-Nijenhuis-Klammer die Algebra der Multivektorfelder $\mathfrak{X}^\bullet(M) = \Gamma^\infty(\bigwedge^\bullet TM)$ auf kanonische Weise zu einer Gerstenhaber-Algebra.

Für Funktionen $f, g \in C^\infty(M)$ und faktorisierte Schnitte $P = X_1 \wedge \dots \wedge X_k$, $Q = Y_1 \wedge \dots \wedge Y_\ell$ erhalten wir für die Schouten-Nijenhuis-Klammer die Gleichungen

$$\begin{aligned} [f, g] &= 0, \\ [f, P] &= -i_{d_E f} P = \sum_{i=1}^k (-1)^i X_i(f) X_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{\cdot} \wedge X_k, \\ [P, Q] &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^\ell [X_i, Y_j] X_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{\cdot} \wedge X_k \wedge Y_1 \wedge \dots \wedge \overset{j}{\cdot} \wedge Y_\ell. \end{aligned}$$

Umgekehrt hätten wir die Schouten-Nijenhuis-Klammer auch durch diese Gleichungen definieren können, siehe z.B. [50].

Definition A.10 ([34]). Ein Lie-Bialgebroid ist ein Paar (E, E^*) von dualen Vektorbündeln, wobei $(E, [\cdot, \cdot], \rho)$ und $(E^*, [\cdot, \cdot]_*, \rho_*)$ Lie-Algebroiden sind, so dass das Lie-Algebroiddifferential d_{E^*} von E^* eine Superderivation der Schouten-Nijenhuis-Klammer auf E ist, d.h. für alle $P \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k E)$ und $Q \in \Gamma^\infty(\bigwedge^\ell E)$ gilt

$$d_{E^*}[P, Q] = [d_{E^*}P, Q] + (-1)^{k-1}[P, d_{E^*}Q].$$

Das folgende Lemma zeigt, dass die Definition nur scheinbar asymmetrisch in E und E^* ist.

Lemma A.11 ([27]). (E, E^*) ist genau dann ein Lie-Bialgebroid, wenn (E^*, E) ein Lie-Bialgebroid ist.

Für ein Lie-Bialgebroid (E, E^*) ist also auch das Lie-Algebroiddifferential d_E von E eine Superderivation der Schouten-Nijenhuis-Klammer auf E^* .

B Formale Reihen

Wir geben noch eine sehr kurze Darstellung über die Grundlagen der Theorie formaler Potenzreihen. Für die Beweise der folgenden Aussagen sowie weiterführende Informationen siehe z.B. [39, 49, 50].

Sei V ein Vektorraum, oder allgemeiner ein Modul über einem Ring R , dann bezeichnen wir die Menge aller Folgen $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit

$$V[[t]] = \prod_{k \in \mathbb{N}} V_k \quad \text{mit} \quad V_k = V \quad \forall k$$

und schreiben Elemente in $V[[t]]$ als formale Potenzreihen in dem formalen Parameter t ,

$$v_t = \sum_{k=0}^{\infty} t^k v_k \quad \text{mit} \quad v_k \in V.$$

Es sei betont, dass wir hier keinerlei Konvergenz der unendlichen Reihe fordern. Durch gliedweise Multiplikation mit Elementen aus R sowie gliedweise Addition wird $V[[t]]$ auf kanonische Weise zu einem R -Modul. Durch die Definition

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i r_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j v_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{\ell=0}^k r_{\ell} v_{k-\ell}$$

wird $V[[t]]$ sogar zu einem $R[[t]]$ -Modul.

Ist V eine Algebra, so wird auch $V[[t]]$ durch die Forderung

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i v_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j w_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{\ell=0}^k v_{\ell} w_{k-\ell}$$

zu einer Algebra. Dies erklärt auch die Schreibweise als formale Reihen.

Ist $v_t = 1 + tw_t$ eine formale Reihe mit einer beliebigen formalen Reihe $w_t \in V[[t]]$ für eine assoziative Algebra V mit Eins, so ist durch

$$v_t^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-tw_t)^k$$

das Inverse von v_t erklärt, wie man durch direktes Nachrechnen zeigt.

Im folgenden wollen wir zusätzlich annehmen, dass der Ring R die rationalen Zahlen enthält, $\mathbb{Q} \subseteq R$. Dann können wir die Exponential- und Logarithmusfunktionen von formalen Reihen bilden, indem wir

$$\exp(tw_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tw_t)^k$$

und

$$\ln(1 + tw_t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (tw_t)^k$$

definieren. Es gelten dann Rechenregel analog zu den für \exp und \ln bekannten Regel. Insbesondere ist \exp auch hier die Umkehrfunktion zu \ln . Wir können deshalb eine formale Reihe $v_t = 1 + tw_t$, die in unterster Ordnung mit der Eins beginnt, immer als $\exp(tu_t)$ schreiben, wobei dann $u_t = \ln(1 + tw_t)$ gilt.

Weiter definieren wir das Anwenden einer formalen Reihe

$$\phi_t = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \phi_i \in \text{Hom}(V, W)[[t]]$$

von Abbildungen $\phi_i : V \rightarrow W$ auf eine formale Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} t^j v_j \in V[[t]]$ durch

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} t^i \phi_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j v_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \sum_{\ell=0}^j \phi_{\ell}(v_{k-\ell})$$

und können ϕ damit als ein Element in $\text{Hom}_{\mathbf{R}[[t]]}(V[[t]], W[[t]])$ auffassen. Tatsächlich sind sogar alle $\mathbf{R}[[t]]$ -linearen Abbildungen von dieser Form, d.h. es gilt

$$\text{Hom}(V, W)[[t]] \cong \text{Hom}_{\mathbf{R}[[t]]}(V[[t]], W[[t]]).$$

Literaturverzeichnis

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 2 edition, 1985.
- [2] F. Bayen, M. Flato, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer. Deformation theory and quantization. *Ann. Phys.*, 111:61–151, 1978.
- [3] G. Blankenstein and T. S. Ratiu. Singular reduction of implicit Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 53(2):211–260, 2004.
- [4] G. Blankenstein and A. J. van der Schaft. Symmetry and reduction in implicit generalized Hamiltonian systems. *Rep. Math. Phys.*, 47(1):57–100, 2001.
- [5] A. M. Bloch. *Nonholonomic mechanics and control*, volume 24 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [6] M. Bordemann. The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology. In *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II (Dijon)*, volume 22 of *Math. Phys. Stud.*, pages 45–68. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [7] M. Bordemann, H.-C. Herbig, and S. Waldmann. BRST cohomology and phase space reduction in deformation quantization. *Commun. Math. Phys.*, 210:107–144, 2000.
- [8] H. Bursztyn, M. Crainic, A. Weinstein, and C. Zhu. Integration of twisted Dirac brackets. *Duke Math. J.*, 123(3):549–607, 2004.
- [9] H. Bursztyn and O. Radko. Gauge equivalence of Dirac structures and symplectic groupoids. *Ann. Inst. Fourier*, 53:309–337, 2003.
- [10] A. Cannas da Silva and A. Weinstein. *Geometric Models for Noncommutative Algebras*. Berkeley Mathematics Lecture Notes. AMS, 1999.
- [11] T. J. Courant. Dirac manifolds. *Trans. AMS*, 319(2):631–661, 1990.
- [12] M. Crainic and R. L. Fernandes. Integrability of Lie brackets. preprint math.DG/0105033, 2004.
- [13] M. Crainic and I. Moerdijk. Deformations of Lie brackets: Cohomological aspects. preprint math.DG/0403434, 2004.
- [14] M. Dalsmo and A. van der Schaft. On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems. *SIAM J. Control Optim.*, 37(1):54–91 (electronic), 1999.

- [15] P. A. M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Number 2 in Monographs Series. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964.
- [16] I. Dorfman. *Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations*. Nonlinear Science: Theory and Applications. John Wiley & Sons, Ltd., 1993.
- [17] C. Eilks. BRST-Reduktion linearer Zwangsbedingungen im Rahmen der Deformation-squantisierung. Master's thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 2004.
- [18] B. V. Fedosov. *Deformation Quantization and Index Theory*. Akademie Verlag, Berlin, 1996.
- [19] C. Frønsdal. Some ideas about quantization. *Rep. Math. Phys.*, 15:111–145, 1978.
- [20] M. Gerstenhaber. Cohomology structure of an associative ring. *Ann. Math.*, 78:267–288, 1963.
- [21] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Ann. Math.*, 79:59–103, 1964.
- [22] M. J. Gotay, J. Nester, and G. Hinds. Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints. *J. Math. Phys.*, 19(11):2388–2399, 1978.
- [23] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, New Jersey, 1992.
- [24] I. Kolář, P. W. Michor, and J. Slovák. *Natural Operations in Differential Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [25] M. Kontsevich. Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I. preprint q-alg/9709040, 1997.
- [26] M. Kontsevich. Formality conjecture. In *Deformation theory and symplectic geometry (Ascona, 1996)*, volume 20 of *Math. Phys. Stud.*, pages 139–156. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [27] Y. Kosmann-Schwarzbach. Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids. *Acta Appl. Math.*, 41(1-3):153–165, 1995. Geometric and algebraic structures in differential equations.
- [28] Y. Kosmann-Schwarzbach. Derived brackets. preprint math.DG/0312524, 2003.
- [29] Y. Kosmann-Schwarzbach. Quasi, twisted, and all that... in Poisson geometry and Lie algebroid theory. preprint math/0310359, 2003.
- [30] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri. Poisson Nijenhuis structures. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 53:35–81, 1990.
- [31] S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999.
- [32] André Lichnerowicz. Applications of the deformations of the algebraic structures to geometry and mathematical physics. In *Deformation theory of algebras and structures and applications (Il Ciocco, 1986)*, volume 247 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 855–896. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988.

- [33] Z. Liu, A. Weinstein, and P. Xu. Manin triples for Lie bialgebroids. *J. Differential Geom.*, 45(3):547–574, 1997.
- [34] K. C. H. Mackenzie and P. Xu. Lie bialgebroids and Poisson groupoids. *Duke Math. J.*, 73(2):415–452, 1994.
- [35] C. Marle. Differential calculus on a Lie algebroid and Poisson manifolds. In *The J. A. Pereira da Silva birthday schrift*, volume 32 of *Textos Mat. Sér. B*, pages 83–149. Univ. Coimbra, Coimbra, 2002.
- [36] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*. Number 17 in Texts in applied mathematics. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1999.
- [37] P. Michor. *Topics in Differential Geometry*. Lecture notes. 2004. Erhältlich unter www.mat.univie.ac.at/~michor/.
- [38] A. Nijenhuis and R. W. Richardson, Jr. Deformations of Lie algebra structures. *J. Math. Mech.*, 17:89–105, 1967.
- [39] I. Niven. Formal power series. *Amer. Math. Monthly*, 76:871–889, 1969.
- [40] D. Roytenberg. *Courant Algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*. PhD thesis, UC Berkeley, 1999. math.DG/9910078.
- [41] D. Roytenberg. On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids. In *Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001)*, volume 315 of *Contemp. Math.*, pages 169–185. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [42] D. Roytenberg. Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 61(2):123–137, 2002.
- [43] P. Ševera and A. Weinstein. Poisson geometry with a 3-form background. In Y. Maeda and S. Watamura, editors, *Noncommutative Geometry and String Theory*, volume 144 of *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, pages 145–154. Yukawa Institute for Theoretical Physics, 2001. Proceedings of the International Workshop on Noncommutative Geometry and String Theory.
- [44] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda. *Classical dynamics: a modern perspective*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974.
- [45] Héctor J. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 180:171–188, 1973.
- [46] M. Tabor. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. An introduction.
- [47] K. Uchino. Remarks on the definition of a Courant algebroid. *Lett. Math. Phys.*, 60(2):171–175, 2002.
- [48] A. J. van der Schaft. Implicit Hamiltonian systems with symmetry. *Rep. Math. Phys.*, 41(2):203–221, 1998.

- [49] S. Waldmann. *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen*. PhD thesis, Fakultät für Physik, Albert-Ludwigs-Universität, Freiburg, 1999. 190 Seiten. Erhältlich unter <http://idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/>.
- [50] S. Waldmann. *Poisson Geometrie und Deformationsquantisierung*. Vorlesungsskript. 2004. Erhältlich unter idefix.physik.uni-freiburg.de/~stefan/.
- [51] A. Weinstein. The symplectic “category”. In *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics (Clausthal, 1980)*, volume 905 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 45–51, Berlin, 1982. Springer-Verlag.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben; zuallererst bei PD Dr. Stefan Waldmann für eine intensive und verständnisvolle Betreuung; aber überhaupt bei allen Mitarbeitern des achten Stocks, insbesondere bei Dr. Nikolai Neumaier für sorgfältiges Korrekturlesen, sowie bei Michael Carl und Carsten Eilks für hilfreiche Kritik und Diskussionen.